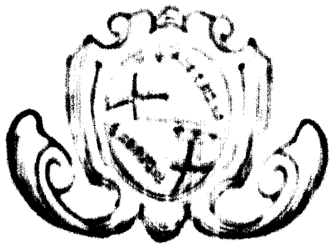
NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ,

SEV

De Additione Fractionum:

PETRI MENGOLI
Art. & Phil. Doct.

Illustrissimis, & Sapientissimis
CIVITATIS BONONIÆ
SENATORIBVS.



Bononiæ, ex Typographia Iacobi Montij.
Superiorum permissu. 1650.

ILLVSTRISSIMI PATRES

VEreor quin veſtris auribus, Patres Ampliſs. conſona hęc numerorũ congeries diſſonare videatur: at innumeris meritis innumeram numerorum ſeriem deberi quis deneget? Arenas maris, ſtellarum numerum, niuis exagonæ multitudinem examinandam contemnerẽ, dum veſtræ fiſus humanitati infinitum metiri minimè dubitaui. Fronti nunquam melior ſucceſsit ſudor, calamus potiori nunquam vndauit atramento, eo quod veſtro nomini, meo veluti numini conſecratur. Hæ meæ quæquæ ſint, integritatis fractiones, quia minimæ ſunt quantitatis, ipſum munus exile profitentur, quia verò in ſingulis diſpoſitionibus infinitæ colliguntur, vestræ non minus humanitatis, quàm obsequij mei numerant argumenta. Vester labor est, Patres Illustriss. dum meis lucubrationibus munificentissimo imperio laborastis: vester, inquam, labor est, cui vestri cætus, nostrique sæculi Apollo amplissimæ lucis impendium erogauit. Spinosa hæc Matheseos dumeta è rigidis acutissimæ artis spinis verecundiæ meæ rosas collecturi respicere ne dedignemini. Valete.

Illustriss. DD. VV.

Seruus humillimus
Petrus Mengolus.

PRÆFATIO

Meditanti mihi persæpe Archimedis parabolæ Quadraturam, propterquam infinita triangula in continuè quadrupla proportione existentia certos limites quantitatis non excedunt; occurrit vniuersalis illa Quadratura eiusdem argumenti occasione a Geometris demõstrata, qua magnitudines infinitæ continuam quamlibet proportionem maioris inæqualitatis possidentes in præfinitas homogeneas quantitates colliguntur. Admirabile sanè Theorema: cuius contemplatione in eam quæstionem inductus sum, vtrum magnitudines ea quacunq; lege dispositæ, vt aliqua possit assumi minor qualibet proposita, vel vt deficientes in infinitum euanescant, infinitæ compositæ omnem propositam quantitatem valeant superare.

In huiusmodi causæ experimentũ Arithmeticas fractiones tẽtare agressus, eas ità disposui, vt singulas vnitates singulis post vnitatem numeris

meris

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{14}$

meris denominarem, in qua quidem dispositione sumi potest magnitudo minor qualibet assignata, & propterea ipsæ magnitudines ad ordinis incrementum quantitate decrescentes in infinitum euanescunt.

Causam igitur in assumptæ dispositionis terminis proponens quærebam, vtrum vnitates denominatæ singulis numeris post vnitatem in infinitum disposita, & aggregatæ infinitam aliquam, vel finitam componerent extensionem. Pro finita extensione respondendum videbatur; quòd numerorum, & fractionum contrariæ sint potestates, numerorum quidem in multiplicatione, qua magnitudines versus infinitum progrediuntur, fractionum verò in diuisione, qua res ad ipsa indiuisibilia reducitur: aggregati autem numeri superant quamlibet propositam quantitatē; ergo à contrario sensu aggregatæ fractiones non videntur posse quamlibet propositā magnitudinem excedere. Hoc sophisma toto ferè mense fuit expectationis argumentum, quòd pro hac parte Geometricam in causa ferre possem sententiam: atqui dum processum demōstrationis examino, iudicium in alterius partis fauorem conuertitur.

Ea est ratio, quia in propositis fractionibus æquales magnitudines numeris Arithmeticè dispositis denominantur, & propterea tres consequentes, vtpote A, B, C, sunt Harmonicè dispositæ, & A, ad C, eamdem habet proportionem, quam excessus, A, B, ad excessum B, C: est autem A, maior C; ergo excessus A, B, maior est excessu B, C; & aggregatum A, C, maius duplo B; & aggregatum ex ternis A, B, C, maius triplo mediæ B. Hoc igitur argumento fractiones in proposita dispositione sumpta terna à prima sunt maiores

A	B	C
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10} \quad \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13} \quad \frac{1}{14}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{16}$

triplis medijs: & media sunt vnitates denominata numeris à ternario multiplicatis $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$; & earumdem triplæ sunt 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, quæ eodem, quo suprà argumento ternæ sunt ma-

maiores triplis medijs. Ergo fractiones propositæ dispositionis assumptæ totidem semper secundum numeros proportionis continuè subtriplæ 3, 9, 27, 81, singulas vnitates excedunt. Possunt autèm sumi, pro quouis assignato numero, totidem in continua proportione subtripla numeri à ternario, iuxtà quorum aggregatum sumptæ fractiones dispositionis propositæ ipsum assignatam numerum superabũt: Ergo propositæ fractiones in infinitum dispositæ, & aggregatæ infinitam extensionem valent implere.

Sit exempli gratia numerus assignatus 4: & sumantur à ternario quatuor continuè proportionales in subtripla 3, 9, 27, 81, quorum summa 120: igitur sumptæ fractiones in multitudine numeri 120 superant assignatum numerum 4; nam tres primæ superant triplum $\frac{1}{3}$*, videlicet vnitatem: nouem deinceps superant triplum aggregati* $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, *videlicet aggregatum* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; *sed huiusmodi aggregatum superat vnitatem, vt ostendi; ergo nouem deinceps superant vnitatem: & propter eamdem*

dem

dem demonstrationem 27, & 81 subsequentes singulas vnitates excedunt.

Hinc duo Corollaria processere. Primum, quòd eadem dispositio à quocunque ordinetur principio in infinitum extenditur; vtpote si dispositarum fractionum prima sit $\frac{1}{5}$, *& aliæ deinceps adhuc ipsam dispositionem propositum*

$$\frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\ \&c.$$

quemuis numerum superare posse: finitum enim est aggregatum ex ijs, quæ sunt omissæ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, *& finiti ab infinito substractio finitum relinquere non potest.*

Alterum, quòd infinitarum fractionum dispositio, in qua singulæ vnitates a singulis numeris Arithmeticè proportionalibus denominantur, pariter in infinitum extenditur. Fiat huiusmodi dispositio A, cuius primam fractionem denominet numerus B, & excessus Arithmeticè proportionalium sit C, & sub singulis fractionibus dispositionis A, ab eodem principio fiat dispositio D, fractionum, in quibus vnitates denominantur omnibus numeris

à B.

A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{14}$	B 2,
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	C 3.

à B. Quia primi denominatores in diſpoſitionibus A, D, ſunt æquales, alter minor eſt quàm vt ad alterum eamdem habeat proportionem, quam C, ad vnitatem; & colligendo ſecundus in diſpoſitione A, minor eſt quàm vt ad ſecundum in diſpoſitione D, eamdem habeat proportionem: ſunt autèm fractiones eumdem habentes numeratorem in reciproca proportione denominatorum; ergo prima, ſecunda, & ſingulæ deinceps fractiones diſpoſitionis D, ſunt minores quàm vt ad primem, ſecundam, & ſingulas deinceps diſpoſitionis A, eamdem habeant proportionem, quam C, ad vnitatem; & colligendo, tota diſpoſitio D, minor eſt quàm vt ad totam diſpoſitionem A, eamdem habeat proportionem, quam C, ad vnitatem. Igitur ſi extenſionis A, quantitas aſsignatur; etiam eiuſdem extenſionis multiplam ſecundum numerum C, quantitatem neceſſe eſt aſsignari, quæ infinita extenſione D, ſit

maior; quod eſt abſurdum, Ergo extènſio infinitarū fractionū diſpoſitionis A, eſt infinita.

Dimiſsis igitur hiſce diſpoſitionibus quantitatis iuriſdictionem ſuperantibus, eamdem contemplationem inſtituere cæpi de fractionibus, in quibus vnitates à numeris triangulis denominantur; an videlicet ipſæ etiam quadraturam excluderent, an potius paterentur: Factis ergo de more calculis, & inſtructa demonſtratione, inueni diſpoſitionis huiuſmodi quadraturam eſſe vnitatem:

Vnitates denominatæ triangulis	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$
quæ aggregatæ à prima ſunt.	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{9}$

quòd aggregatæ quotlibet à prima ſunt æquales numero multitudinis ipſarum denominato per numerum binario maiorem, & propterea ſemper vnitate ſunt minores eo defectu, qui iuxtà multitudinis additarum fractionum incrementum infrà quālibet aſsignatam magnitudinē diminuitur, & in infinitū euaneſcit.

Præterea in eadem diſpoſitione binæ ſumptæ poſt vnitatem ſingularum ab vnitate ſunt di-

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{21} & & \frac{1}{28} & & \frac{1}{36} & & \frac{1}{45} \\ & \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{6} & & & & \frac{1}{12} & & & & \frac{1}{20} & \end{array}$$

midię: ergo diuidendo, omnes poſt vnitatem, vnitati ſunt ęquales.

Tandèm ſi eiuſdem diſpoſitionis fractiones

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} & \frac{1}{36} & \frac{1}{45} & \frac{1}{55} & \frac{1}{66} & \frac{1}{78} & \frac{1}{91} & \frac{1}{105} & \frac{1}{120} \\ \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}} & \multicolumn{4}{c}{\frac{1}{4}} & \multicolumn{8}{c}{\frac{1}{8}} \end{array}$$

totidem ſumantur deinceps ſecundùm numeros proportionis continuè ſubduplę à binario, videlicet 2, 4, 8, &c. aggregatę ſunt in continuè dupla proportione; atqui magnitudines duplę proportionis aggregatę infinitę ſunt ęquales duplo primę, cum in noſtro caſu prima ſit dimidium vnitatis, ergo propoſitę fractiones aggregatę infinitę ſunt ęquales vnitati.

Huiuſmodi ſunt, quę in primo præſentis opuſculi libro demonſtraui de fractionibus, in quibus vnitates denominantur planis omniū numerorum ab vnitate: quia enim ſinguli trianguli numeri ſingulorum huiuſmodi planorum ſunt dimidij, propter reciprocam pro-

por-

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \frac{1}{56} & \frac{1}{72} \\ & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} & \frac{1}{36} \end{array}$$

portionem ſingulę fractiones, in quibus vnitates denominantur triangulis duplę ſunt ſingularum, in quibus denominantur planis; & ideò vtrique diſpoſitioni eadem conueniunt demonſtrationes.

Ab huius fractionum diſpoſitionis contemplatione fœliciter expeditus, ad aliam progrediebar diſpoſitionem, in qua ſingulę vnitates numeris quadratis denominantur. Hæc ſpeculatio fructus quidem laboris rependit, nondùm tamen effecta eſt ſoluendo, ſed ingenij ditioris poſtulat adminiculum, vt præciſam diſpoſitionis, quam mihimetipſi propoſui, ſummam valeat reportare.

Pro fructibus habētur huius opuſculi Theoremata, ea præcipuè, quę in primo libro demonſtrantur, & præterea ſequentes propoſitiones videlicet.

1. Vnitates denominatę compoſitis ex qua-

dratis

dratis ab vnitate, & lateribus eorumdem, dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales vnitati.

Quadrati	1	4	9	16	25
Latera	1	2	3	4	5
Compositi	2	6	12	20	30
Vnitates denominatæ compositis.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$

Constat enim, quòd singulæ fractiones huiusce dispositionis congruũt singulis, in quibus vnitates denominantur planis omnium numerorum ab vnitate.

2. Vnitates denominatæ compositis, ex quadratis ab vnitate, & lateribus eorumdem duplis, dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales $\frac{3}{4}$

Quadrati	1	4	9	16	25	36
Laterũ dupli	2	4	6	8	10	12
Compositi	3	8	15	24	35	48
Vnitates denominatæ compositis.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{48}$

Quia singulæ, quæ sumuntur alternæ à prima, congruunt singulis, quæ denominantur planis omnium imparium ab vnitate, & ideò sunt æquales $\frac{1}{2}$. Alternæ verò à secunda congruunt singulis, quæ denominantur planis omnium parium à binario, & propterea sunt æquales $\frac{1}{4}$. Ergo colligendo, omnes sunt æquales $\frac{3}{4}$.

3. Vnitates denominatæ compositis ex quadratis ab vnitate, & lateribus eorumdem triplis dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales $\frac{11}{18}$.

Quadrati	1	4	9	16	25
Laterum tripli	3	6	9	12	15
Compositi	4	10	18	28	40
Vnitates denominatæ compositis.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{40}$

Quia sumptæ à prima binis relictis congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate cũ excessu 3, & propterea aggregatæ infinitæ sunt æquales $\frac{1}{3}$: Sumptæ autem à secunda binis relictis congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum à 2, cum eodẽ excessu 3, & sunt æquales $\frac{1}{6}$; Residuæ tandem congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis

planis Arithmeticè dispositorum à 3. cum eodem excessu 3, & ideò sunt aquales $\frac{1}{9}$. Ergo omnes equales sunt aggregatis $\frac{1}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{9}$, videlicet $\frac{11}{18}$.

Et alia huiusmodi Theoremata, eadem pariter methodo demonstraui.

Ad propositam ergo Quæstionē redeo, cuius plura capita contrarias, vt ostendi, merentur sententias. Istorum autem duo solumodo in hoc opusculo mihi videor absoluisse; alterum de fractionibus, in quibus vnitates denominantur productis numerorum Arithmeticè dispositorum; alterum de ijs, in quibus differentiæ dispositorum quomodolibet numerorū eorumdem productis denominantur: præterea eadem in Geometricis quantitatibus demonstrari posse indicaui, præuia solumodò nominum interpretatione, quæ habetur in vltimis definitionibus libri tertij.

In aßumptis autèm capitibus quid questioni respondendum sit, ex sequentibus vnusquisque poterit iudicare.

NOVÆ

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ SEV De Additione Fractionum.

LIBER PRIMVS.

In quo tractatur de Fractionibus, quarum sunt denominatores numeri plani.

Principales Additiones habentur in Propositionibus huius libri 7. 8. 13. 23. 37.

Quadraturæ verò in Propositionibus 17. 26. 40.

DEFINITIONES

I.

Differentiam duarum magnitudinum, quandò prima excedit secundam, voco, excessum primæ & secundæ.

II.

Quandò verò prima deficit à secunda, voco, defectum primæ, & secundæ.

Simi-

III.

Similes differentias, voco, tùm excessus, tùm defectus inter se.

IV.

Dissimiles verò excessus defectibus.

V.

Magnitudines Arithmeticè dispositas, voco, quarum (sumptis continuè binis quibuslibet) differentiæ similes antecedentium, & consequentium sunt æquales.

VI.

Magnitudines Harmonicè dispositas, voco, quarum (sumptis continuè ternis quibuslibet) prima se habet ad tertiam, vt differentia primæ, & secundæ ad similem differentiam secundæ, & tertiæ.

Præterea suppono Lectorem informatum esse de ijs, quæ in Quinto, Septimo, Octauo, & Nono libris Elementorum Euclidis traduntur, quoad capescendas demonstrationes. Nam, quoad ipsas propositiones, & praxim numerosam, sufficit memoriæ mandasse præcepta logisticæ Fractionum, quæ passim penes Arithmeticos leguntur.

Theorema 1. Propositio 1.

Trium Arithmeticè dispositorum planum sub extremis medium est Harmonicè inter plana sub singulis extremis, & medio.

A. 3. B. 5. C. 7.
D. 2.
H. 6. I. 14.
E. 15. G. 21. F. 35.

Sint Arithmeticè dispositi tres A, B, C, quorum differentia D, & planum extremorum A C, sit G, plana verò sub singulis extremis, & medio A B, C B, sint E, F. Dico quòd G, medium est Harmonicè inter E, F. Ex multiplicationibus D A, D C, producantur H, I; ergo vt A, ad C, ita est H, ad I: & quia E, F, sunt plana B A, B C; ergo E, ad F, est vt A, ad C, vel vt H, ad I: quoniam A, multiplicando B, C, producit E, G; ergo A, multiplicando differentiam B, C, producit similem differentiam E, G; & multiplicando D, producit H; est autem D, differentia B, C; ergo H, est differentia E, G, similis differentiæ B, C, vel differentię A, B: Similiter demonstrabimus quòd I, est differentia G, F, similis differentiæ A, B, vel E, G: ergo E, ad F, est vt differentia E, G, ad similem differentiam G, F. Ergo G, medium est Harmonicè inter E, F. Quod erat demonstrandum. Def. 6.

Theorema 2. Propos. 2.

Trium Harmonicè dispositorum planum sub extremis medium est Arithmeticè inter plana sub singulis extremis, & medio.

A. 3 B. 4. C. 6.
H. 1. I: 2.
D. 6.
E. 12. G. 18. F. 24.

SInt Harmonicè dispositi tres A, B, C, & planum extremorum A C, sit G, plana verò sub singulis extremis,& medio A B, C B, sint E, F. Dico quòd G, medium est Arithmeticè inter E, F. Sint H, & I, differentiæ similes A,B,& B, C ; ergo vt A, ad C, ita est H, ad I, & productum A I, est æquale producto C H. Sit huiusmodi productum D: quoniam A, multiplicando B,C, producit E, G; ergo A, multiplicando differentiam, B, C producit similem differentiam E, G; & multiplicando I, producit D; est autem I, differentia B, C ; ergo D, est differentia E, G, similis differentiæ B, C, vel A, B : Similiter demonstrabimus quòd D est differentia G, F, similis differentiæ A, B, vel E, G : ergo differentiæ E, G, & G, F, sunt æquales, & similes. Ergo G, medium est Arithmeticè inter E, F. Quod, &c.

Def. 6. Def. 5.

DEFINITIO VII.

Vnam magnitudinem altera denominatam, voco, quamlibet fractionem, in qua vna magnitudo stat loco numeratoris, altera verò loco denominatoris.

Theor. 3. Propos. 3.

Eadem magnitudine tribus Harmonicè dispositis denominata fiunt fractiones Arithmeticè disposita.

A. 1.
B. 3. C. 4. D. 6.
E. $\frac{1}{3}$ F. $\frac{1}{4}$, G. $\frac{1}{6}$
H. 12. K. 18. I. 24.

DEnominetur A, magnitudo tribus Harmonicè dispositis B, C, D, vt fiant fractiones E, F, G. Dico, quòd E, F, G, sunt Arithmeticè dispositæ. Ex multiplicationibus C B, C D, B D, producantur H, I, K; ergo, quia B, C, D, sunt Harmonicè dispositi, K, medius est Arithmeticè inter H, I: & quia I, K, sunt producti D C, D B; ergo I, ad K, est vt C, ad B; & ex denominatione A, per C, & B, fiunt fractiones F, & E; ergo vt C, ad B, vel vt I, ad K, ita est E, ad F : Similiter demonstrabimus,quòd vt K, ad H, ita est F,ad G; ergo per conuersionem rationis,& exæquo vt I, K, H, sunt Arithmeticè dispositi, sic fractiones E, F, G, sunt Arithmeticè dispositæ. Quod, &c.

DEFINITIO VIII.

Defferentias, & plana in aliqua dispositione, voco

voco absolutè, differentias, & plana magnitudinum, quæ sunt continuè consequentes in illa dispositione, primæ videlicet, & secundæ; secundæ, & tertiæ; & sic deinceps vsque ad vltimam, si dispositæ sunt in aliqua multitudine; vel in infinitum, si dispositæ concipiuntur infinitæ.

Theor. 4. Propos. 4.

Factis duabus dispositionibus, prima quidem omnium numerorum ab vnitate, secunda verò omnium numerorum, quos assumptus aliquis numerus metitur ab assumpto; Vnitates denominatæ planis in prima, ad vnitates denominatas planis in secunda, singulæ ad singulas eiusdem ordinis, ita se habent, vt assumpti numeri quadratus ad vnitatem.

A.	1.		2.		E.3.		4.		5.		6.		7.		8.
B.		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$	
C.	3.		6.		F.9.		12.		15		18.		21.		24.
D.		$\frac{1}{18}$		$\frac{1}{54}$		$\frac{1}{108}$		$\frac{1}{180}$		$\frac{1}{270}$		$\frac{1}{378}$		$\frac{1}{504}$	

Sit

SIt omnium numerorum ab vnitate dispositio A, & assumptus numerus E, cuius quadratus F; & sit omnium numerorum, quos E, metitur ab E, dispositio C; Sint etiam B, vnitates denominatæ planis in A; & D, vnitates denominatæ planis in C. Dico, quòd singulæ B, ad singulas D, eiusdem ordinis, ita se habent, vt F, ad vnitatem. Quia numerus E, & vnitas æquè metiuntur numeros in C, & A, eiusdem ordinis, vt singuli in C, ad E, ita singuli eiusdem ordinis in A, ad vnitatem, & sunt E, & vnitas homologæ ordinis eiusdem numeris in A, & C; conuertendoque, & ex æquo binæ C, inter se sunt vt binæ A, inter se, si sumantur homologæ ordinis eiusdem: ergo plani denominatores in singulis D, ad planos denominatores in singulis eiusedm ordinis B, sunt similes, & duplicatam habent proportionem homologorum laterum videlicet numeri E, ad vnitatem, vel eamdem quā numerus F, ad vnitatem; sed vt denominatores D, ad B, inter se, ita reciprocè sunt vnitates denominatæ B, ad D, inter se: Ergo singulæ B, ad singulas eiusdem ordinis D, sunt vt F, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 5. Propos. 5.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate binæ à secunda sunt dimidiæ singularum à prima.

SIt A, series omnium numerorum ab vnitate, & B, sint vnitates denominatæ planis in A. Dico, quòd binæ B, à secunda sunt dimidiæ singularum à prima. Sit C, series omnium numerorum à binario, quos binarius metitur,

A.	1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.		8.
B.		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$	
C.			2.				4.				6.				8.
D.					$\frac{1}{8}$				$\frac{1}{24}$				$\frac{1}{48}$		

titur; & D, ſint vnitates denominatæ planis in C; ergo
Prop. 4. ſingulæ B, à prima ad ſingulas D, à prima ſunt vt 4. binarij quadratus ad vnitatem: & quoniam in A, ſunt omnes numeri ab vnitate, ſunt inter numeros A, à binario, qui eſt ſecundo loco, omnes C, à primo, interpoſitis tamen ſingulis Arithmeticè medijs quos binarius non metitur;
Prop. 1. ergo ſinguli plani denominatores vnitatum D, à prima medij ſunt Harmonicè inter binos denominatores B, à ſecunda;
Prop. 3. ergo ſingulæ D, à prima mediæ ſunt Arithmeticè inter binas B, à ſecunda; & propterea ſingulæ D, à prima ad binas B, à ſecunda ſunt dimidiæ, videlicet, vt vnitas ad 2: Ergo ex æquo ſingulæ B, à prima ad binas B, à ſecunda ſunt vt 4. ad 2; & conuertendo binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularũ à prima. Quod, &c.

Theor. 6. Propoſ. 6.

Differentia laterum plano denominata eſt diſſimilis differentia vnitatum ſingulis lateribus denominatarum.

Sint latera A, B, quorum differentia C, denominetur plano D, vt fiat fractio E; & denominata vnitate per B, & A, fiant fractiones F, & G; & ſit C, exceſſus A, B. Dico quòd E, eſt defectus F, G. Quia F, eſt vnitas deno-

no-

A. 5.	C. 2.	B. 3.
	D. 15.	
F. $\frac{1}{5}$	E. $\frac{2}{15}$	G. $\frac{1}{3}$

minata per A, ex multiplicatione F A, producitur vnitas; & ex multiplicatione vnitatis, & B, producitur B; ergo ex mutua multiplicatione F A B, producitur B; eſt autem D, planum A B; ergo ex multiplicatione F D, producitur B. Similiter demonſtrabimus, quod ex mlutiplicatione G D, producitur A. Cum igitur ex multiplicationibus G, & F, in D, producantur A, & B; ergo ex multiplicatione exceſſus G, F, in D, producitur exceſſus A, B, videlicet C; Sed quia E, fractio eſt ex denominatione C, per D; ergo etiam ex multiplicatione E, in D, producitur C; ergo E, eſt æqualis exceſſui G, F: ergo E, eſt defectus F, G. Quod, &c.

DEFINITIO IX.

Continuam magnitudinum diſpoſitionem, vòco, cum differentiæ antecedentium, & conſequentium ſunt ſimiles.

Theor. 7. Prop. 7.

Differentiæ denominatæ planis in continua diſpoſitione ſimul ſumptæ ſunt æquales vni differentiæ denominatæ plano extremorum.

 Sint

A. 2. B. 4. C. 5. D. 9.
E. $\frac{2}{8}$ F. $\frac{1}{20}$ G. $\frac{4}{45}$
H. $\frac{7}{18}$
I. $\frac{1}{2}$ K. $\frac{1}{4}$ L. $\frac{1}{5}$ M. $\frac{1}{9}$

SInt A, B, C, D, aliquot magnitudines continuæ dispositionis in qua differentiæ planis denominatę sint fractiones E, F, G, Differentia verò denominata plano extremorum A, D, sit fractio H. Dico, quòd E, F, G, simul sumptæ sunt æquales H. Denominentur singulæ vnitates lateribus A, B, C, D, vt fiant fractiones I, K, L, M. Quoniam E, est differentia denominata plano A B, & I, K, sunt vnitates denominatæ lateribus A, B; æqualis est E, differentiæ I, K, quæ dissimilis est differentiæ A, B. Similiter demonstrabimus F, G, H, æquales esse differentijs K, L, L, M, I, M, quę sunt dissimiles differentijs B, C, C, D, A, D; vnde quia differentiæ in dispositione A, B, C, D, sunt similes, etiam differentię in dispositione I, K, L, M, sunt similes; & propterea simul sumptæ sunt æquales differentiæ I, M, vel fractioni H: Atqui colligendo differentiæ in dispositione I, K, L, M, sunt ęquales fractionibus E, F, G, simul sumptis. Ergo fractiones E, F, G, simul sumptę sunt ęquales H. Quod, &c.

Def. 6.

Def. 5.

Theor. 8. Propos. 8.

Vnitates denominatæ planis in Arithmetica dispositione sunt ad vnitatem plano extremorum denominatam vt numerus multitudinis ipsarum ad vnitatem.

Sint

A. 2. B. 5. C. 8. D. 11. N. 3. O. 9.
E. $\frac{1}{10}$ F. $\frac{1}{40}$ G. $\frac{1}{88}$ H $\frac{1}{22}$
I. $\frac{3}{10}$ K $\frac{3}{40}$ L $\frac{3}{88}$ M. $\frac{9}{22}$

SInt A, B, C, D, in Arithmetica dispositione, cuius planis denominatę singulę vnitates sint fractiones E, F, G, & vnitas denominata plano extremorum A D, sit H. Dico quòd E, F, G, ad H, sunt vt numerus multitudinis E, F, G, ad vnitatem. Sit N, differentia semper eadem in dispositione, quę planis denominetur, vt fiant fractiones I, K, L, & sit O, differentia extremorum A, D, quę plano denominetur, vt fiat fractio M. Igitur facti sunt I, K, L, ęquales M. Et quia E, F, G, & I, K, L, eosdem habent denominatores, numerator verò communis ipsarum E, F, G, est vnitas, & factorum I, K, L, est N; ergo tùm singulæ, tùm collectæ E, F, G, ad I, K, L, vel ad M, sunt vt vnitas ad N. Pariter quia M, H, eundem habent denominatorem, nnmerator verò M, est O, & ipsius H, est vnitas; ergo M, ad H, est, vt O, ad vnitatem; & ex ęquo in perturbata collectæ E, F, G, ad H, sunt, vt O, ad N: Cum autem A, B, C, D, sint Arithmeticè dispositi, est O, differentia extremorum ad N, differentiam consequentium ita multiplex, vt numerus multitudinis E, F, G, ad vnitatem. Ergo E, F, G, ad H, sunt, vt numerus multitudinis F, F, G, ad vnitatem. Quod, &c. Prop. 7.

Theor. 9. Propos. 9.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate ternæ à tertia sunt pars tertia singularum à prima.

Ordi-

A.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
B.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	
C.			3.			6.			9.
D,				$\frac{1}{18}$			$\frac{1}{54}$		

ORdinentur A, omnes numeri ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis A. Dico ternas B, à tertia, tertiam esse partem singularum à prima. Ordinentur omnes numeri C, à ternario, quos idem metitur, & D, vnitates denominatæ planis C: Et quoniam A, sunt omnes numeri, etiam inter numeros A, à ternario, qui est tertio loco, sunt omnes C, à prmo, binis medijs Arithmeticè semper interpositis, quos ternarius non metitur. Prop. 8. Ergo ternæ vnitates B, à tertia (denominatæ planis quatuor dispositorum Arithmeticè à numeris C, qui sunt inter numeros A,) ad singulas vnitates D, (denominatas planis numerorum C, qui eorumdem quatuor semper sunt extremi) à prima sunt, vt idem ternarius, numerus videlicet magnitudinum, quæ ternæ sumuntur ad vnitatem; Prop. 4. Singulæ autem D, à prima ad singulas B, à prima sunt, ut unitas ad 9, quadratum ternarij: Ergo ex æquo ternæ B, à tertia sunt ad singulas B, à prima, ut 3. ad 9. nempe pars tertia. Quod, &c.

Theor. 10. Propos. 10.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate, quaternæ à quarta sunt pars quarta singularum à prima.

Prop. 5. NAm quia binæ a secunda sunt dimidiæ singularum à prima, binę à quarta sunt ad singulas à secunda, vt vnitas ad 2. & colligendo quaternæ à quarta sunt ad binas à secunda, vt vnitas ad 2. & binę à secunda sunt ad singulas à prima, vt vnitas ad 2. vel, vt 2. ad 3. Ergo ex æquo quaternæ à quarta ad singulas à prima sunt vt vnitas ad 4. videlicet pars quarta. Quod, &c.

Eadem huius, & præcedentis demonstrationum methodo possunt singuli sequentis Theorematis casus demonstrari, videlicet, Vnitates denominatas planis omnium numerorum ab vnitate quinas à quinta partem esse quintam singularum à prima, senas à sexta partem sextam, septenas à septima partem septimam, & sic deinceps; ex quorum inductione postea patefiat ipsius veritas conclusionis: ne tamen scrupulosum Geometram dubitare contingat, generali superinde factæ propositioni vnica satisfaciam demonstratione, vt infra.

Theor. 11. Propos. 11.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate sumptæ totidem ab vna ipsarum secundum numerum ordinis eiusdem, sunt pars ab eodem numero denominata singularum à prima.

ORdinentur A, omnes numeri ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis A, quarum F, assumpta, & inter numeros A, sit eiusdem F, numerus ordinis E. Dico B, sumptas ab F, semper totidem secundum numerum E, partem esse denominatam ab E, singularum B, à prima. Ordinentur ab E, omnes numeri C, quos E, metitur,

A.	1.	2.	E. 3.	K. 4.	L. 5.	H. 6.	M. 7.	N. 8.	I. 9.
B.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	F.	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$
C			3.			6.			9.
D.					$\frac{1}{18}$			$\frac{1}{54}$	

tur, & D, vnitates denominatæ planis numerorum C. Quoniam A, ſunt numeri ab vnitate, ſunt etiam inter numeros A, ab E, qui eſt in eiuſdem ordinis loco, omnes numeri C, à primo, qui ſint E, H, I, interpoſitis totidem ſemper medijs Arithmeticè, ſecundum numerum vnitate minorem E. Sint numeros E,H, interpoſiti K, L, & numeros H, I, totidem interpoſiti M, N, ſecundum numerum vnitate minorem E; Coaſſumptis ergò hinc inde ſemper duobus eorum, quos E, metitur, fiunt ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ numerorum E, K, L, H, & H, M, N, I, totidem ſemper, ſecundum numerum vnitate maiorem E, quarũ planis denominatæ vnitates ſunt ipſæ B, ſumptæ totidem ab F, ſecundũ numerũ E, quæ ad ſingulas vnitates D, à prima denominatas planis extremorũ
Prop. 8. earũdem diſpoſitionum, qui ſunt numeri C, ita ſe habẽt, vt E, numreus multitudinis totidem ſumptarum ab F, ad
Prop. 4. vnitatem; Singulæ autem D, à prima, ad ſingulas B, à prima ſunt, vt vnitas ad quadratum E: ergo ex æquo ſumptæ B, ab F, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad ſingulas B, à prima ſunt, vt E, ad ſuum quadratum; Sed E, cum ſuum quadratum metiatur per ſe ipſum, ſui quadrati pars eſt a ſe ipſo denominata. Ergo ſumptæ B, ab F, ſemper totidem ſecundum numerum E, ſunt pars ab eodem E, denominata, ſingularum B, à prima. Quod, &c.

Theor-

Theor. 12. Propoſ. 12.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate, ſumptæ à prima totidem ſemper ſecundum numeros proportionis continuè ſubduplæ ab vnitate ſunt in proportione continuè dupla.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$

VNitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitate prima ſit A, duarum ſequentium aggregatum B, quatuor ſequentium aggregatum C, & deinceps totidem huiuſmodi vnitatum ſecundum numeros proportionis continuè ſubduplæ ſumantur aggregata. Dico A, B, C, eſſe in proportione continuè Prop. 5.
dupla. Quia binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima, B, ſubduplum eſt ipſius A, & eadem ratione, quia quaternæ à quarta ſunt dimidiæ binarum a ſecunda, C, ſubduplum eſt ipſius B, & eadem ſemper demonſtratione, quodlibet aggregatum ſubduplum eſt præcedentis. Ergo conuertendo A, B, C, ſunt in proportione continuè dupla. Quod, &c.

Theor.

Theor. 13. Prop. 13.

Vnitatum, quæ denominantur planis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt æquales numero ipsarum multitudinis denominato per numerum vnitate maiorem.

A. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	D. 8.	E. 9.
B.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$

SInt A, numeri ab vnitate, & B, quotlibet vnitates à prima earum, quæ denominantur planis numerorum A. Dico B, aggregatas æquales esse numero multitudinis ipsarum B, denominato per numerum vnitate maiorem. Sint D, E, numeri quorum plano denominatur vltima ipsarum B. Et quoniam sunt dispositi ab vnitate omnes numeri A, quorum consequentium defectus sunt singulæ vnitates, quæ planis eorumdem denominatæ sunt B; Igitur B, aggregatæ sunt æquales defectui extremorum vnitatis, & E, per eorumdem planum denominato. Est autem D, defectus vnitatis, & E, & eorumdem planus idem E: Ergo B, sunt ęquales D, denominato per E. Sed cum numeri A, sint omnes ab vnitate, numerus E, est multitudinis numerorum A, vsque ad E, & D, vnitate minor, quam E, numerus multitudinis ipsarum B. Ergo vnitates B, aggregatæ sunt ęquales numero ipsarum multitudinis denominato per numerum vnitate maiorem. Quod, &c.

Prop. 7.

Co-

Corollarium.

Vnde constat, quod vnitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum, quotlibet assumptæ à prima sunt minores vnitate.

Problema primum. Propos. 14.

Data proportione minoris inæqualitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ sit numeri ad numerum vnitate maiorem.

A. 47.	B. 53.	C. 6.
E. 8	F. 9.	D. 48.

SIt proportio data minoris inęqualitatis A, ad B. Oportet alteram inuenire maiorem proportione A, ad B, quæ sit numeri ad numerum vnitate maiorem. Sit C, excessus B, A, & D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: constat D, non esse æqualem A; alias C, metiretur etiam A, & metitur se ipsum; ergo metiretur compositum ex C, A, videlicet B, & non esset D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: constat etiam D, non esse minorem A; quia sequeretur idem, vel maius absurdum; ergo D, maior est A; & D, ad C, maiorem habet proportionem A, ad C. Sit E, numerus, per quem C, metitur D, & E, auctus vnitate fiat F; ergo D,

C ad

ad C, est, vt E, ad vnitatem; ergo E, ad vnitatem maiorem habet proportionem A, ad C; & componendo E, ad F, maiorem habet proportionem A, ad B; & est numerus F, vnitate maior, quàm E. Quod facere opporebat.

Axioma Primum.

Quando infinitæ magnitudines infinitæ sunt extensionis, possunt in aliqua multitudine sumi, vt superent quamlibet propositam extensionem.

Theor. 14. Propos. 15.

Quando in ordine magnitudinum in infinitum dispositarum, quotlibet assumptæ à prima sunt minores vna eadem proposita magnitudine generis eiusdem, omnes à prima in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt extensionis finitæ.

A —— —— —— D —— —— ——

Sint in extensione A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ magnitudines, quarum quotlibet assumptæ à prima sint minores D, generis eiusdem. Dico extensionem A, esse finitam: alias erit infinita, & sumptæ in aliqua multitudine magnitudines dispositæ in A, à prima superabunt quamlibet propositam extensionem D, contra hipothesim: non est igitur A, extensionis infinitæ, sed finitæ. Quod, &c. Ax. 1.

Corollarium.

Colligitur ex his quòd vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate in infinitum disposita, & aggregatæ sunt extensionis finitæ. Corol. Prop. 13.

DEFINITIO X.

Magnitudines dicuntur implere propositam extensionem, quando existentes infinitæ sunt extensionis minoris propositæ; vel quando existentes finitæ, ita sunt minores propositæ, vt vna alia magnitudine adiecta in earumdem ordine continuato proxima, fiant extensionis maioris propositæ.

Axioma Secundum.

Quando infinitæ magnitudines finitæ sunt extensionis, & singulæ magnitudines eadem *in infinitum concipiuntur in vna, & altera extensione disponi, & aggregari, congruit vna extensio alteri.*

Theor. 15. Propos. 16.

Quando magnitudines à prima dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt extensionis finitæ, sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem maiorem quidem prima, minorem tamen extensione omnium.

A ——— B ——— C ———

SIt A, extensio finita magnitudinum, quę à prima dispositæ in infinitum, & in ea sunt aggregatæ, & sit proposita extensio B, maior quidem prima dispositarum in A, minor tamen ipsa extensione A, & ex magnitudinibus in A, dispositis assumptæ à prima, & eodem ordine dispositæ in C, impleant B. Dico, quod assumptæ in C, sunt in aliqua multitudine: alias assumptæ in C, quæ implent B, sunt infinitæ; igitur in extensione B, sunt dispositæ eodem ordine in infinitum, & aggregatæ magnitudines, quæ pariter in extensione A; & sunt ambo A, B, extensiones finitæ; congruit ergo B, extensioni A, minor maiori; quod est absurdum. Ergo assumptæ in C, quæ implent B, non sunt infinitæ, sed in aliqua multitudine. Quod, &c. Ax. 2.

Theor.

Theor. 16. Propos. 17.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt æquales vnitati.

A ——— B ——— C ———
D ——— E ———

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate. Dico A, æqualem esse vnitati: alias erit A, maior, vel minor vnitate. Sit maior, igitur in aliqua multitudine sumptæ à prima vnitates in A, dispositæ implent vnitatem. Sit huiusmodi multitudininis numerus B, qui adiecta vnitate fiat C: ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sumptę in multitudine numeri C, sunt maiores vnitate, quod est absurdum. Non est igitur A, maior vnitate. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad vnitatem, inueniatur altera maior, quæ sit numeri D, ad E, vnitate maiorem; & aliquot vnitates in A, dispositæ sumantur à prima in multitudine numeri D; quæ cum sint æquales numero D, denominato per E, habebunt ad vnitatem eamdem proportionem, quam D, ad E, maiorem videlicet, quam A, ad vnitatem: Ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sunt maiores omnibus in infinitum dispositis, pars toto; quod est absurdum. Non igitur A, minor est vnitate; sed neque maior. Ergo A, æqualis est unitati. Quod, &c.

Prop. 16. Def. 10. Corol. Prop. 13. Prop. 14. Prop. 13.

Aliter.

Aliter.

Prop. 5. QVia binæ vnitatum dispositarum in A, à secunda sunt dimidiæ singularum à prima; colligendo, omnes à secunda sunt dimidiæ omnium à prima; & diuiden-
Prop. 13. do, omnes à secunda sunt æquales primæ; est autem prima dimidium vnitatis; Ergo omnes à prima sunt æquales vnitati. Quod, &c.

Aliter eadem Methodo.

Prop. 9. QVia dispositarum in A, ternæ à tertia sunt pars tertia singularum à prima; colligendo, omnes à tertia sunt pars tertia omnium à prima; & diuidendo, omnes à
Prop. 13. tertia sunt dimidiæ duarum præcedentium; sunt autem duæ præcedentes æquales 2. denominato per 3: igitur omnes à tertia sunt æquales vnitati denominatæ per 3. Ergo colligendo, omnes dispositæ in A, sunt æquales 3. denominato per 3. videlicet vnitati. Quod, &c.

Theor. 17. Prop. 18.

Vnitatum denominatarum planis omniū numerorum ab vnitate, qualibet assumpta, summa succedentium in infinitum, & summa præcedentium, & assumpta sunt continuè proportionales, vt vnitas ad numerum ordinis assumptæ.

Vni-

D. 5. E. 6.
C —— —— A. $\frac{1}{30}$ B ————

VNitatum denominatarum planis omnium numerorum ab vnitate sit A, quęlibet assumpta, cuius ordinis numerus D; Sitque B, summa succedentium in infinitum, & C, summa præcedentium, & assumptæ A. Dico A, B, C, esse continuè proportionales, vt vnitas ad D. Sit E, numerus vnitate maior D: quia D, est numerus ordinis A, est etiam numerus multitudinis aggregatarum in C; igitur C, est æqualis D, denominato per E; aggregatum vero ex C, B, est æquale vnitati; ergo C, ad aggregatum ex C, B, est vt D, denominatus per E, ad vnitatem, videlicet vt D, ad E; & diuidendo, C, ad B, est vt D, ad vnitatem; quapropter C, ad B, est vt D, denominatus per E, ad vnitatem pariter denominatam per E; ergo B, æqualis est vnitati denominatæ per E. Quia etiam D, est numerus ordinis A; & E, inter omnes numeros ipsi D, proximus vnitate maior; constat, quod A, est vnitas denominata plano D E; sed vnitas denominata per E, ad vnitatem denominatam plano D E, est vt planum D E, ad E; vel (diuidendo per E,) vt D, ad vnitatem; ergo B, ad A, est vt D, ad vnitatem. Sunt ergo continuè proportionales C, B, A, vt D, ad vnitatem; & conuertendo, A, B, C, sunt continuè proportionales vt vnitas ad D. Quod, &c. Prop. 13. Prop. 17.

Theor. 18. Prop. 19.

Factis duabus Arithmeticis dispositionibus prima ab vnitate, altera ab assumpto numero,

mero,

mero, eorum videlicet numerorum, quos aſſumptus metitur per ſingulos in prima diſpoſitos; vnitates denominatæ planis omnium numerorum primæ, ad vnitates denominatas planis omnium numerorum alterius diſpoſitionis ordinis eiuſdem, ita ſe habent, vt aſſumpti numeri quadratus ad vnitatem.

A. 1.	3.	5.	7.	9.	11.	
D.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{99}$	
		B. 2.				
C. 2.	6.	10.	14.	18.	22.	
E.	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{396}$	
		F. 4.				

SIt diſpoſitio Arithmetica numerorum A, ab vnitate; & B, numerus aſſumptus; à quo ſit diſpoſitio numerorum C, quos B, metitur per numeros A, eiuſdem ordinis; vnitates autem denominatæ planis numerorum A, & C, ſint D, & E; & numeri B, quadratus F. Dico D, ad E, ordinis eiuſdem eſſe, vt F, ad vnitatem. Quia B, metitur numeros C, per A, eiuſdem ordinis, vt ſunt numeri A, ad vnitatem, ita C, eiuſdem ordinis ad B; & ſunt numeri A, & C, ordinis eiuſdem homologi vnitatis, & B; & eadem ratione, vt vnitas ad numeros A, ita B, ad C, ordinis eiuſdem; ergo ex æquo numeri A, inter ſe ſunt vt C, eorumdem ordinum inter ſe; & plani eorumdem ordinum numeris A, & C, contenti ſunt ſimiles; ergo denominatores D, ad eiuſdem ordinis

nis

nis denominatores E, ſunt ſimiles; & duplicatam proportionem habent homologorum laterum vnitatis, ad B; videlicet eamdem, quam vnitas ad F; Ergo D, ad E, ordinis eiuſdem ſunt reciprocè, vt F, ad unitatem. Quod, &c.

Theor. 19. Prop. 20.

Factis duabus Arithmeticis diſpoſitionibus prima ab vnitate, ſecunda vero ab aſſumpto in prima, eorum, quos aſſumptus metitur per ſingulos primæ; Omnes numeri ſecundæ ſunt in prima, totidem ſemper interiectis, quot vnitatum eſt aſſumptus vna dempta.

A. 1	3. B. 5.	7.	9.	11.	13.	
D. 5.	15. 25.	35.	45.	55.	65.	
		C. 4.				
E. 4.	12. 20,	28.	36.	44.	52.	

SIt diſpoſitio Arithmetica numerorum A, ab vnitate; & inter numeros A, aſſumptus B; à quo fiat diſpoſitio Arithmetica numerorum, quos idem B, metitur per ſingulos A. Dico numeros D, eſſe inter numeros A, totidem ſemper interpoſitis, quot ſunt vnitates in B, vna minus. Sit C, exceſſus B, & vnitatis; & diſponantur numeri E, qui ſint exceſſus binorum D, & A, eiuſdem ordinis. Quoniam B, metitur numeros D, per A, eiuſ-

D dem

dem ordinis; eſt vnitas ad B, vt numeri A, ad D; & diuidendo, eſt vnitas ad C, vt numeri A, ad E; igitur E, ſunt multiplices numeri C; & quia C, exceſſus B, & vnitatis magnitudinum, quæ ſunt inter numeros A, vel æqualis eſt, vel multiplex exceſſui conſequentium eorundē A; ergo numeri E, ſunt multiplices exceſſui conſequentium A; & ſunt numeri E, exceſſus numerorum D, A; ergo numeri D, ſunt inter numeros A. Præterea, quia numeri A, metiuntur numeros D, per B; igitur exceſſus conſequentium A, metitur exceſſum conſequentium D, per B; ſed inter extremas mediæ Arithmeticè totidem interponuntur, quoties exceſſus conſequentium exceſſum extremarum metitur vna minus; Ergo numeri D, ſunt inter numeros A, totidem ſemper interpoſitis numeris A, quot ſunt vnitates in B, vna minus. Quod, &c.

Theor. 20. Prop. 21.

Vnitates denominatæ planis numerorū Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, ſumptæ ſemper totidem ab aſſumpta, quot vnitatum eſt numerus inter Arithmeticè diſpoſitos eiuſdem ordinis cum aſſumpta, ſunt ad ſingulas à prima, vt vnitas ad eumdem numerum.

SInt numeri A, Arithmeticè diſpoſiti ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis numerorum A, quarum

A.	1.		D. 3.		5.		7.		9.		11.
B.		$\frac{1}{3}$	C.	$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{35}$		$\frac{1}{63}$		$\frac{1}{99}$	
E.	3.		9.		15.		21.		27.		33.
F.		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{135}$		$\frac{1}{315}$		$\frac{1}{567}$		$\frac{1}{891}$	

rum vna C, aſſumpta, & inter numeros A, ſit D, ordinis eiuſdem. Dico B, ſumptas à C, ſecundum numerum D, ad ſingulas eaſdem B, à prima eſſe vt vnitas ad numerum D. Diſponantur Arithmeticè numeri E, à D, quos D, metitur per numeros A, & ſint F, vnitates denominatæ planis numerorum E: conſtat, quod omnes Prop. 20.
numeri E, ſunt inter numeros A, à D, totidem ſemper interpoſitis ex reliquis numeris A, quot ſunt vnitates in D, vna dempta; ergo numerorum A, inter binos numeros conſequentes E, ſingulæ ſiunt arithmeticè diſpoſitiones numerorum, quorum planis denominatæ vnitates B, ſunt à C, totidem ſemper, quot ſunt numeri intermedij vno amplius, videlicet, quot ſunt vnitates in D; & ad ſingulas F, à prima denominatas plano extremo- Prop. 8.
rum, qui ſunt E, ſe habent, vt numerus multitudinis earum, quæ totidem ſemper ſumuntur, videlicet numerus D, ad vnitatem: ſunt autem ſingulæ F, à prima ad ſin- Prop. 19.
gulas B, à prima, vt vnitas ad quadratum aſſumpti D, ergo ex æquo vnitates B, totidem ſemper ſumptæ à C, ſecundum numerum D, ad ſingulas eaſdem B, à prima ſunt, vt numerus D, ad ſui quadratum, videlicet, vt vnitas ad D. Quod, &c.

Theor. 21. Prop 22.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, ſumptæ à prima ſecundum numeros proportionis continuè ſubmultiplicis ab vnitate, ad numerum ſibi proximum in Arithmetica diſpoſitione, ſunt in eadem continuè multiplici proportione.

A. 1. B. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19.

C $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$ $\frac{1}{99}$ $\frac{1}{143}$ $\frac{1}{195}$ $\frac{1}{255}$ $\frac{1}{323}$

D. $\frac{1}{3}$ E. $\frac{1}{9}$ F. $\frac{1}{27}$ G. $\frac{1}{81}$

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti ab vnitate, quorum B, proximus vnitati; & ſint C, vnitates denominatæ planis numerorum A; & ſegregentur C, vt prima ſit D, & à ſecunda totidem, quot ſunt vnitates in B, ſint E; & aliæ toties totidem ſint F; & quot ſunt F, toties totidem ſecundum numerum B, ſint G, & ſic deinceps: conſtat C, ita ſegregatas eſſe in D, E, F, G, vt ſumptæ ſint ſecundum numeros proportionis continuè ſubmultiplicis ab vnitate ad B. Dico D, E, F, G, eſſe in eadem continuè multiplici proportione numeri B, ad vnitatem.
Prop. 21. Quia B, eſt ſecundo loco Arithmeticè diſpoſitorum, ſingulæ C, à prima ad totidem ſemper ſumptas à ſecunda ſecundum numerum B, ſunt vt B, ad vnitatem; ergo
Prop. 21. D, ad E, eſt vt B, ad vnitatem. Item ſingulæ in E, ad totidem ſecundum numerum B, ſumptas in F, ſunt vt B, ad vnitatem; & quot ſunt ſingulæ in E, toties totidem ſecundum numerum B, ſunt in F; ergo colligendo omnes E, ad omnes F, ſunt vt B, ad vnitatem. Similiter demonſtrabitur omnes F, ad omnes G, eſſe vt B, ad vnitatem, & ſic deinceps. Ergo D, E, F, G, ſunt in continuè multiplici proportione numeri B, ad vnitatẽ. Quod, &c.

Theor. 22. Prop. 23.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aggregatæ à prima ſunt æquales numero multitudinis earumdem denominato per productum eiuſdem, & exceſſus diſpoſitionis Arithmeticæ auctum ſemper vnitate.

A. 1. 3. 5. 7. E. 9.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$

D. 4. F. 8.

G. $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{2}{35}$ $\frac{2}{63}$

SInt numeri A, diſpoſiti Arithmeticè ab vnitate, quorum exceſſus B; Sint etiam C, vnitates denominatę planis numerorum A, aſſumptæ à prima ſecundum numerum D; & inter numeros A, poſt vnitatem numeri totidem ſumantur, & ſumptorum ſit extremus E; & ſit F, exceſſus E, & vnitatis: conſtat F, ad B, eſſe ut D, multitudo

titudo numerorum A, post unitatem ad ipsam vnitatem: igitur D, multiplicando B, facit F, qui auctus vnitate fit E. Dico C, æquales esse D, denominato per E. Ex denominatione B, per plana numerorum A, vsque ad E, fiant fractiones G, totidem, quot sunt C. Quia B, est excessus consequentium A, & F, extremorum, & E, pla-
Prop. 7. num extremorum, videlicet vnitatis, & E; sunt G, æquales F, denominato per E: Sunt autem G, ad C, vt B, ad vnitatem; & vt B, ad vnitatem, ita est F, ad D, uel F, denominatus per E, videlicet G, ad D, pariter denominatum per E; ergo G, ad C, sunt ut G, ad D, denominatum per E; ergo C, sunt æquales D, denominato per E. Quod, &c.

Theor. 23. Prop. 24.

Vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate quotlibet aggregatæ à prima sunt minores vnitate denominata excessu consequentium dispositionis Arithmeticæ.

C. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$
B. 2. D. 4. E. 8. F. 9.

SInt C, quotlibet unitates denominatæ planis numerorum arithmeticè cum excessu B, dispositorum ab vnitate, sumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores esse vnitate denominata per B. Ex ductu B, in D, fiat E; & F, vnitate maior, quam E; igitur D, ad F, minorem habet proportionem, quam D, ad E; & quia E, productus est ex B, in D, ut D, ad E, ita est vnitas ad B; ergo D, ad F, minorem habet proportionem, quam vnitas ad B; & propterea D, denominatus per F, est minor vnitate denominata per B: sunt autem C, æquales D, denominato per F; ergo C, sunt minores vnitate denominata per B. Quod, &c. Prop. 23.

Corollarium Primum.

Vnde constat primo loco vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis. Prop. 15.

Corollarium Secundum.

Patet etiam secundo loco, quod vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum. Prop. 16.

Probl. 2. Prop. 25.

Data proportione minoris inæqualitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ sit numeri, quem datus numerus metiatur ad numerum vnitate maiorem.

A. 39 C. 7. B. 43.
D. 10. E. 11. F. 14. G. 15.

Data sit proportio minoris inæqualitatis A, ad B, &
datus numerus C, opportet alteram proportio-
nem inuenire maiorem data, quæ sit numeri, quem C,
Prop. 14. metiatur ad numerum unitate maiorem. Data propor-
tione minoris inæqualitatis A, ad B, maior inueniatur,
quæ sit numeri D, ad numerum E, vnitate maiorem. Si contigerit C, metiri D, constat proportionem D, ad E, quæsitam esse. Quod si C, non metitur D, sumatur C, toties, donec fiat maior D,& sit factus F,cui unitate aggregata fiat G. Dico proportionem F,ad G, esse quæsitam; quoniam F, maior est D, habet F, ad vnitatem maiorem proportionem, quam D; & componendo F, ad G, maiorem, quam D, ad E; sed D, ad E, adhuc maiorem habet, quam A, ad B; ergo F, ad G, multò maiorem habet, quàm A, ad B: inuenta est ergo proportio F, numeri, quem C, metitur ad G, numerum vnitate maiorem, quæ est maior proportione A, ad B. Quod faciendum erat.

Theor.

Theor. 24. Prop. 26.

Vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate in infinitum disposita, & aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ differentia consequentium dispositionis Arithmeticæ.

A —————— C. $\frac{1}{2}$
B. 2. D. 14. E. 15.
H —————— F. 7. G. $\frac{7}{15}$

Sint in A, dispositæ in infinitum,& aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quorum differentia B; & sit C, vnitas denominata per B. Dico A, æqualem esse C: alias erit A,
maior, vel minor C. Sit maior; igitur in aliqua multi- Coroll. 2.
tudine sumptæ à prima unitates dispositæ in A, implent Prop. 24.
C: sit huiusmodi multitudinis numerus D, qui adiecta Ax. 1.
unitate fiat E; ergo aliquot unitates ex dispositis in A, Def. 10.
sumptæ à prima in multitudine numeri E, sunt maiores
C, quod est absurdum: igitur non est A, maior C. Sit Prop. 24.
minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad Prop. 25.
C, inueniatur altera maior, quæ sit numeri D, quem B, metiatur ad E, numerum unitate maiorem; metiatur autem B, ipsum D, per F; igitur F, ad D, est ut unitas ad B; unitas autem ad B, est ut C, ad vnitatem; ergo F, ad D, est ut C, ad unitatem; & D, ad E, maiorem habet proportionem A, ad C; ergo ex æquo in perturbata I, ad E, maiorem habet proportionem, quàm A, ad vnitatem. Denominetur I, per E, ut fiat fractio G; ergo vt

E est

eſt I, ad E, ita G, ad unitatem; igitur G, ad vnitatem habet maiorem proportionem quàm A, ad eamdem vnitatem; ergo G, maior eſt A. Sumantur ex vnitatibus diſpoſitis in A, à prima totidem ſecundum numerum F; & ſit aſſumptarum extenſio H: conſtat quòd H, eſt æqualis F, denominato per E, nempe fractioni G; ergo etiam H, maior eſt A, pars toto, quod eſt abſurdum: igitur A, non eſt minor C; ſed neque maior. Ergo A, eſt æqualis C. Quod, &c.

Prop. 23.

Aliter.

A. 1. 3. 5. K. 7. 9. 11.
E. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$
C —— —— —— I. $\frac{1}{63}$ ——
B. 2. D. $\frac{1}{2}$ F. 3. G. 6. H. 7.

SIt A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum conſequentium differentia B; & in C, ſint diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis numerorum A; & unitas denominata per B, ſit D. Dico C, æqualem eſſe D. Sit E, aggregatum quotlibet ex diſpoſitis in C, à prima, quarum multitudo F; & ex F, in B, fiat G, qui auctus unitate ſit H: conſtat E, æqualem eſſe F, denominato per H: inter diſpoſitas in C, ſit I, proximè ſuccedens aggregatis in E; & K, numerus ordinis eiuſdem inter numeros A, cuius I, inter vnitates C: conſtat etiam, quod unitatum C, quæ ſuccedunt ab I, ſumptæ ſemper totidem ſecundum numerum K, ad ſingulas eaſdem à prima ſunt ut unitas ad K; ergo colligendo, omnes C, ab I, ad omnes eaſdem C, à prima ſunt ut unitas ad K; ergo conuertendo, & per conuerſionem rationis, omnes C, ad aſſumptas in E, ſunt

Prop. 23. Prop. 21.

ſunt ut K, ad exceſſum K, ſuper vnitatem: & quoniam K, & I, in ſuis diſpoſitionibus ſunt ordinis eiuſdem; eſt exceſſus K, ſuper unitatem ad exceſſum conſequentium B, vt multitudo aggregatarum in E, videlicet numerus F, ad unitatem; ergo exceſſus K, ſuper unitatem eſt æqualis producto ex F, in B, videlicet numero G; & propterea, adiecta hinc inde unitate, numerus K, eſt æqualis H; igitur C, ad E, eſt ut H, ad G; & E, ad unitatem eſt ut F, denominatus per H, ad unitatem, uidelicet ut F, ad H; ergo ex æquo in perturbata C, ad unitatem eſt ut F, ad G; ſed quia B, multiplicando F, facit G, eſt ut F, ad G, ita unitas ad B; uel unitas denominata per B, uidelicet D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem eſt ut D, ad eamdem uuitatem. Æquales ergo ſunt C, & D. Quod, &c.

Theor. 25. Prop. 27.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex numero multitudinis ipſarum, & differentia diſpoſitionis Arithmeticæ ad vnitatem.

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti ab unitate quorum conſequentium differentia B; & unitatum, quæ denominantur planis A, ſint aſſumptæ à prima C, totidem, quot ſunt unitates in D; & ſuccedentes in infini-

 tum

A. 1. 3. 5. 7. 9. 11.
C. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ E. —— —— ——
B. 2. D. 3. F. 6. G. 7.

tum intelligantur dispositæ, & aggregatæ in E; & ex B, in D, producatur F. Dico C, ad E, esse ut F, ad unitatem. Augeatur F, unitate ut fiat G: constat C, æquales esse D, denominato per G; & C, E, simul æquales esse unitati denominatę per B; & quia ex ductu B, in D, fit F, est unitas ad B, ut D, ad F; & unitas denominata per B, est æqualis D, denominato per F; propterea C, E, simul sunt æquales D, denominato per F; ergo C, ad C, E, simul sunt ut D, denominatus per G, ad D, denominatum per F; uel reciprocè, ut F, ad G; & diuidendo, C, ad E, sunt ut F, ad unitatem. Quod, &c.

Prop. 23. Prop. 27.

Theor. 26. Propos. 28.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima ad vltimam assumptarum sunt, vt productum ex numero eiusdem ordinis cum assumpta inter Arithmeticè dispositos, & numero multitudinis assumptarum ad vnitatem.

SIt in A, dispositio Arithmetica numerorum ab unitate; & unitatum, quæ denominantur planis A, sint quot-

A. 1. 3. E. 5. F. 7.
B. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ D. $\frac{1}{35}$
C. 3.

quotlibet assumptæ à prima B, quarum multitudo C, & ultima D, & eiusdem ordinis inter Arithmeticè dispositos numerus E. Dico B, ad D, esse ut planum C E, ad unitatem. Inter numeros A, sit F, proximus maior E. Et quoniam E, D, sunt eiusdem ordinis in suis dispositionibus; constat D, æqualem esse unitati denominatæ plano E F: quoniam etiam C, est multitudo B, sunt in ordine A, numeri ab unitate ad E, totidem, & post unitatem ad F, pariter totidem Arithmeticè dispositi; ergo excessus F, super unitatem toties continet differentiam consequentium, quot sunt unitates in C; ergo C, multiplicando differentiam consequentium producit excessum F, super vnitatem cui quidem excessui adiecta vnitate fit numerus F; vnde constat B, esse æquales C, denominato per F; ergo B, ad D, sunt vt C, denominatus per F, ad vnitatem denominatam per planum E F; & multiplicando terminos per planum E F, vt B, ad D, ita se habet planum C E, ad unitatem. Quod, &c. Prop. 23.

Theor. 27. Propos. 29.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, qualibet assumpta ad succedentes in infinitum est, vt differentia consequentium ad numerum

rum ordinis eiusdem cum assumpta inter Arithmeticè dispositos.

A. 1. 3. E. 5. 7. 9. 11
B. 2. C. $\frac{1}{35}$ D — —
F $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ G. 3.

SIt in A, dispositio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum differentia B; & vnitatum, quæ denominantur planis A, sit assumpta C, quam succedentes in infinitum dispositæ, & aggregatæ sint in D; & eiusdem ordinis cum C, sit E, inter numeros A. Dico C, ad D, esse ut B, ad E. Sint, quæ præcedunt D, aggregatæ in
Prop. 28. F, quarum multitudo G; constat C, ad F, esse ut unitas
Prop. 27. ad planum G E; & F, ad D, est ut planum B G, ad unitatem; ergo ex æquo in perturbata C, ad D, est ut planum B G, ad planum G E; vel ut B, ad E. Quod, &c.

Theor. 28. Prop. 30.

Duarum fractionum minimis numeris expressarum, cum denominatores numeratorum sunt æquemultiplices superparticulares, maior est, quæ maioribus numeris exponitur, & excessus est æqualis excessui numeratorum denominato per planū denominatorum.

Sint

A. 3. H. 4. B. 7.
— — C. 12. D. 28.
F. 13. G. 29.
L. 91. K. 87. I. 84:

SInt duæ fractiones, quarum numeratorum A, B, sint æquemultiplices C, D; & adiecta singulis unitate fiant denominatores F, G, æquemultiplices superparticulares numeratorum A, B, quibus propositæ fractiones in minimis numeris exprimuntur; & sit B, maior A, per excessum H; vnde fit etiā D, maior C; & addita communi unitate, G, maior F. Dico fractionem B, per G, excedere fractionem A, per F, numero H, denominato per planum F G. Ex B, ducto in C, & F, producantur I, & K; & ex A, in G, fiat L: quia D, C, sunt æquemultiplices B, A, ut B, ad A, ita D, ad C; & idem I, qui fit ex B, in C, fiet etiam ex A, in D; igitur A, multiplicando G, D, facit K, I; & multiplicando vnitatem excessum G, D, facit se ipsum A, excessum K, I: demonstrabitur eodem modo B, fieri excessum L, I: ergo excessus B, A, videlicet H, est etiam excessus L, K; sed excessus fractionum B, per G, & A, per F, est excessus L, K, denominatus plano G F; ergo excessus fractionum B, per G, & A, per F, est H, denominatus plano G F. Quod, &c.

Theor. 29. Prop. 31.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet assum-

aſſumptæ ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt multiplex differentia in diſpoſitione ſecundum multitudinem aſſumptarum ad multiplicem eiuſdem differentiæ ſecundum multitudinem præcedentium à prima ſemper auctum vnitate.

B. 3.

A. 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19.

E. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$ C. $\frac{1}{70}$ $\frac{1}{130}$ $\frac{1}{208}$ G. —

F. 2. D. 3. L. 5.

I. 6. K. 7. H. 9. M. 16.

SIt A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum differentia B; & vnitatum, quæ denominantur planis A, ſint aſſumptæ C, quarum multitudo numerus D; & ſint E, quæ præcedunt, quarum multitudo numerus F; & quæ ſequuntur ſint in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ in G; & ex B, ducto in F, D, fiant I, H; & I, auctus unitate fiat K. Dico C, ad G, eſſe ut H, ad K. Fiat ex F, D, aggregatum L, & ex H, K, aggregatum M: conſtat L, eſſe multitudinem E, & C, ſimul. Et quoniam ex B, ducto in F, D, facti ſunt I, H; etiam ex B, in L, fiet aggregatum ex I, H; quod auctum unitate eſt aggregatum ex H, K, videlicet M: ergo M, eſt productum ex L, in B, auctum unitate; & propterea C,E, ſimul sũt ęquales L, denominato per M; & E, ęqualis eſt F, denominato per K; ergo C, eſt æqualis exceſſui L, F, nempe D, numero denominato per planum M K; ergo C, ad E, C, ſimul eſt ut D, denominatus per planum M K, ad L, denominatum per M; vel (multiplicando

Prop. 23.

Prop. 30.

do

do terminos per planum M B,) ut planum D B, denominatum per K, ad planum B L: ſunt autem E, C, ſimul ad G, vt planum B L, ad unitatem; ergo ex æquo C, ad G, eſt ut planum B D, vel H, denominatus per K, ad unitatem; ſed eſt H, denominatus per K, ad unitatem ut H, ad K. Ergo C, ad G, eſt ut H, ad K. Quod, &c. Prop. 27.

Theor. 30. Prop. 32.

Vnitates, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitate binæ à prima ſunt duplæ ſingularum vnitatum, quæ denominantur planis omnium imparium ab vnitate.

A. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

C. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{42}$

B. 1. 3. 5. 7.

D. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$

SInt diſpoſitiones omnium numerorum A, & omnium imparium B, ab vnitate; & vnitatum denominatarum planis A, & B, ſint C, & D. Dico binas C, duplas eſſe ſingularum D, à prima. Quoniam in A, ſunt omnes impares interiectis inter binos conſequentes ſingulis paribus, concipientur ſingulę diſpoſitiones Arithmeticæ trium numerorum, quorum extremi impares, & medius par; igitur ſingula plana ſub extremis imparibus, videlicet ſingula plana numerorum B, à primo ſunt media harmonicè inter bina plana ſub ſingulis imparibus Prop. 1.

F bus

bus,& intermedio pari, videlicet inter bina plana numerorum A, à primo; ergo singulæ vnitates planis B, denominatæ, videlicet singulæ D, à prima sunt mediæ Arithmeticè inter binas vnitates planis A, denominatas, videlicet binas C, à prima. Ergo binæ C, sunt duplæ singularum D, à prima. Quod, &c. Prop. 3.

Theor. 31. Prop. 33.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate sumptæ semper totidem à prima secundum aliquem numerum ad vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè cum eodem numero excessu dispositorum ab vnitate singulas à prima sunt, vt idem numerus ad vnitatem.

A 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.
B $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{42}$ $\frac{1}{56}$ $\frac{1}{72}$ $\frac{1}{90}$
C. 3.
D 1. 4. 7. 10.
E $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{70}$

SInt dispositiones A, omnium numerorum, & B, vnitatum denominatarum planis A, quæ semper totidem sumantur à prima secundum numerũ C; sint etiam dispositiones, vna quidẽ D, Arithmetica numerorum ab vnitate cum excessu C, & altera E, vnitatum, quæ denominantur planis D. Dico quòd B, totidem semper à pri-

à prima, quot sunt vnitates in C, ad singulas E, sunt vt C, ad vnitatem. Quoniam in D, sunt numeri ab vnitate, quorum excessus C, & in A, sunt oẽs numeri; igitur oẽs D, sunt inter numeros A, ab vnitate semper totidem interiectis, quot sunt vnitates C, vna dempta; & propterea in A, possunt concipi ab vnitate singulæ dispositiones Arithmeticæ totidem semper terminorum, quot sunt vnitates C, vna adiecta, quorum in extremis locis sunt numeri D; & B, sumptæ semper totidem à prima, quot sunt vnitates in C, sunt vnitates denominatæ planis numerorum, qui in singulis huiusmodi dispositionibus comprehenduntur; & E, singulæ à prima sunt vnitates denominatæ planis extremorum earundem dispositionum. Ergo sumptæ B, à prima semper totidem secundum numerum C, sunt ad singulas E, à prima, vt C, ad vnitatem. Quod, &c. Prop. 8.

Theor. 32. Prop. 34.

Factis duabus Arithmeticis dispositionibus à duobus numeris, quorum sunt æquemultiplices differentiæ in dispositionibus; vnitates denominatæ planis numerorum earumdem, cum eiusdem sunt ordinis, inter se reciprocè sunt, vt quadrati primorum numerorum.

C. 2.		D. 5.		E. 6.		F. 15.		G. 3.	
A. 2.		8.		14.		20.		26.	
H.	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{112}$		$\frac{1}{280}$		$\frac{1}{520}$		
B. 5.		20.		35.		50.		65.	
I.	$\frac{1}{100}$		$\frac{1}{700}$		$\frac{1}{1750}$		$\frac{1}{3250}$		
K. 1.		4.		7.		10.		13.	
L.	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{28}$		$\frac{1}{70}$		$\frac{1}{130}$		

SInt A,& B, duæ Arithmeticæ diſpoſitiones à numeris C,D,quarum differentiæ ſint E,F,æquemultiplices C, D, per numerum G; & ſint H, I, vnitates denominatæ planis numerorum A,B. Dico H,ad I, eiuſdem ordinis eſſe, vt quadratus numeri D, ad quadratum C. Fiat K, Arithmetica diſpoſitio ab vnitate, in qua differentia G, cuius numerorum planis denominatæ vnitates diſponantur, in L. Quoniam C, metitur ſe ipſum primo loco diſpoſitum in A, per vnitatem primo loco diſpoſitam in K; & metitur E, differentiam numerorum A, per G, differentiam numerorum K; ergo componendo, C,
Prop. 19. metitur omnes A, per omnes eiuſdem ordinis K; ergo L, ad H, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri C, ad vnitatem; & conuertendo, H, ad L, ita ſe habent vt vnitas ad quadratum C: eadem methodo demonſtrabimus, quod L, ad I, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri D, ad vnitatem; & ex æquo in perturbata H, ad I, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri D, ad quadratum C. Quod,&c,

Theor.

Theor. 33. Prop. 35.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ab aliquo numero, ſumptæ ab aſſumpta ſemper totidem ſecundum numerum ordinis eiuſdem inter Arithmeticè diſpoſitos, ad ſumptas à prima ſemper totidem ſecundum primum numerum eorumdem Arithmeticè diſpoſitorum ſunt, vt idem primus numerus ad numerum ordinis eiuſdem cum aſſumpta.

	B. 2.		E. 5.				
A. 2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	
C.	$\frac{1}{10}$, D.	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{88}$	$\frac{1}{154}$	$\frac{1}{238}$	$\frac{1}{340}$	
F. 3.							
G. 2.		8.		14.		20.	
I.	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{112}$		$\frac{1}{280}$		
H.	5.					20.	
K.			$\frac{1}{100}$	&c.			

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti à B, & ſint C, vnitates denominatæ planis numerorum A, quarum aſſumpta D, & eiuſdem ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos A, ſit E. Dico C, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem C, ſumptas à prima totidem ſemper ſecundum numerum B, eſſe vt B,

ad

ad E: ſit F, differentia in diſpoſitione A, & à numeris B, E, fiant Arithmeticæ diſpoſitiones G, H, quarum differentiæ plana F B, F E: & vnitates denominatæ planis numerorum G, H, ſint I, K. Quia omnes numeri G, H, ſunt inter numeros A, à B, E, ſemper totidem interiectis, quot ſunt vnitates in B, E, vna dempta; poterunt concipi in A, ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ à B, C, totidem ſemper numerorum, quot ſunt vnitates in B, E, vna amplius, in quarum extremis reperiuntur bini con-
Prop. 8. ſequentes numeri diſpoſitionum G, H: ergo vnitates denominatæ planis huiuſmodi ſingularum diſpoſitionum Arithmeticarũ ab E, cuiuſmodi ſunt C, ſumptę à D, ſemper totidem ſecundum E, ad vnitates denominatas plano extremorum earumdem, cuiuſmodi ſunt ſingulæ K, à prima ſunt vt E, ad vnitatem, vel vt quadratus numeri
Prop. 34. E, ad E; ſingulæ autem K, ad ſingulas I, à prima ſunt, vt quadratus numeri B, ad quadratum E: ergo ex æquo in perturbata C, ſumptæ à D, ſemper totidem ſecundum E, ad ſingulas I, a prima ſunt, vt quadratus B, ad E;
Prop. 8. ſingulæ autem I, vtpote vnitates denominatæ planis extremorum diſpoſitionum Arithmeticarum, quæ ſingulæ concipiuntur inter numeros A, a B, ad vnitates denominatas planis conſequentium earumdem diſpoſitionum, cuiuſmodi ſunt vnitates C, ſumptæ a prima ſemper totidem ſecundum numerum B, ſunt vt vnitas ad B, vel vt B, ad ſui quadratum: ergo ex æquo in perturbata C, ſumptæ a D, ſemper totidem ſecundum E, ad eaſdem C, ſumptas a prima ſemper totidem ſecundum B, ſunt vt B, ad E. Quod, &c.

Theor. 34. Propoſ. 36.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ſumptæ à duabus aſſumptis totidem ſemper ſecundum numeros ordinum earumdem ſunt reciprocè, vt ijdem numeri.

A. 2. E. 5. 8. F. 11. 14.
B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ D. $\frac{1}{154}$

Sint numeri A, diſpoſiti Arithmeticè, & B, vnitates denominatæ planis eorumdem, quarum ſint aſſumptæ C, D, & eorumdem ordinum inter numeros A, ſint E, F. Dico B, ſumptas a C, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem B, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundum numerum F, eſſe vt F, ad E. Quoniam B, Prop. 35.
ſumptæ à C, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem B, ſumptas à prima ſemper totidem ſecundum primum numerorum A, ſunt vt idem primus ad E; item Prop. 35.
ipſæ B, ſumptæ à prima ſemper totidem ſecundum eumdem numerum primum ad eaſdem B, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundũ numerum F, ſunt vt F, ad eumdem primum numerorum A; ergo ex æquo in perturbata B, ſumptæ à C, ſemper totidem ſecundum numerum E, ad eaſdem B, ſumptas à D, ſemper totidem ſecundum numerum F, reciprocè ſunt vt F, ad E. Quod, &c.

Theor. 35. Propoſ. 37.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum, ſumptæ quotlibet à prima ſunt æquales numero multitudinis earumdem denominato per productum ſub eodem numero multitudinis, & primo numero, & differentia in diſpoſitione ſemper auctum quadrato eiuſdem primi numeri.

B. 2. C. 3. E. 4 G. 24. H. 28. F. $\frac{1}{7}$
A. 2. 5. 8. K. 11. L. 14. 17.
D. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ I. $\frac{1}{154}$ $\frac{1}{238}$

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti à B, cum differentia C; & ſint D, unitates denominatæ planis numerorum A, quarum ſumptę quotlibet à prima ſecundum multitudinem E, ſint aggregatæ in F; & ex E, in planũ B C, ducto ſit productus G, qui auctus quadrato B, ſit H. Dico quod F, eſt æqualis E, denominato per H. Sit I, vltima ſumptarum in F; & K, inter numeros A, eiuſdem ordinis, cui proximus maior L: conſtat F, ad vnitatem denominatam plano B L, ſe habere vt E, ad vnitatem; ergo F, eſt æqualis E, denominato per planum B L: quoniam, quot ſunt vnitates in E, tot ſunt aggregatæ in F; totidemque ſunt plana numerorum A, vſque ad L; necnon totidem ſunt exceſſus æquales ipſi C, inter extremos L, B: ergo exceſſus L, B, ad C, eſt vt E, Prop. 8.

ad

ad vnitatem; & propterea exceſſus L, B, eſt ęqualis plano C E; & L, eſt compoſitus ex plano C E, & numero B; & (multiplicando per B,) planus B L, eſt compoſitus ex producto B, in planum C E, & ex quadrato B; huiuſmodi autem eſt etiam numerus H; ergo planus B L, eſt æqualis H: ergo F, eſt æqualis E, denominato per H. Quod, &c.

Theor. 36. Propoſ. 38.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum, quotlibet aggregatæ à prima ſunt minores vnitate denominata plano primi numeri, & differentia diſpoſitionis Arithmeticæ.

A. 5. C. 2. D. 3. E. 6. F. 30. G. 34.
B $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ $\frac{1}{238}$

SInt in B, ſumptæ à prima ſecundum numerum A, quotlibet vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum à C, cum differentia D; & fiat E, planum C D. Dico B, minorem eſſe vnitate denominata per E. Ex A, in E, ducto fiat F, qui auctus quadrato C, ſit G: quia G, maior eſt F, habet A, ad G, proportionem minorem, quam ad F; ſed, cum F, ſit productus ex A, in E, vt A, ad F, ita eſt vnitas ad E; ergo A, ad G, minorem habet proportionem, quam vnitas ad E; & A, denominatus per G; minor eſt vnitate denominata per E; eſt autem B, æqualis A, denominato per G; Prop. 37.
ergo B, minor eſt vnitate denominata per E. Quod &c.

G Corol-

Corollarium Primum.

Prop. 15. *Vnde constat vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè dispositorum in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis.*

Corollarium Secundum.

Prop. 16. ***Constat etiam, quod vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum.***

Probl. 3. Prop. 39.

Data proportione minoris inæqualitatis alteram inuenire maiorem data, quæ sit inter numeros, quorum minor sit multiplex dati, & maior minorem excedat altero dato.

A. 23.	C. 3.	E. 6.	G. 42.
B. 29.	D. 7.	F. 7.	H. 49.

SIt data proportio minoris inæqualitatis A, ad B; datiq; numeri C, & D; opportet inuenire alteram proportionem minoris inæqualitatis maiorem data A, ad B, quæ sit inter numeros, quorum minor sit multiplex C, & maior minorem excedat per D. Inueniatur Prop. 1. proportio maior data A, ad B, quæ sit numeri E, quem datus C, metiatur ad numerum F, vnitate maiorem; & D, multiplicando E, F, faciat G, H. Dico proportionem G, ad H, esse quæsitam. Est enim vt E, ad F, ita G, ad H, proportio minoris inæqualitatis maior data A, ad B; & quia C, metitur E; & E, metitur G; ergo C, metitur G; & conuertendo, G, est multiplex C: quia E, ad F, est vt G, ad H; diuidendo, E, ad vnitatem est vt G, ad excessum H, G; & permutando, E, ad G, est, vt vnitas ad excessum H, G; sed (cum D, multiplicando E, fecerit G,) vt E, ad G, ita est vnitas ad D; ergo vnitas ad excessum H, G, est vt vnitas ad D; igitur D, est excessus H, G: inuenta est ergo proportio minoris inæqualitatis G, ad H, maior data A, ad B, in qua minor numerus G, est multiplex dati C, & maior H, excedit G, per alterum datum D. Quod facere, &c.

Theor. 37. Prop. 40.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum dispositæ in infinitũ, et aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ ꝑ produ-

ctum numeri primi in Arithmetica dispo-sitione, & differentia consequentium.

A ————————————————————

B. 2. C. 3. D. $\frac{1}{6}$ E —— F ——

I —— G —— H —— K ————

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorū à B, cum differentia C; & sit D, vnitas denominata plano B C. Dico A, esse æqualem D. Alias erit A, ma-
Coroll. 2. ior, vel minor D: sit maior; igitur in aliqua multitudi-
prop. 33. ne sumptę à prima vnitates dispositæ in A, implent D: sit huiusmodi multitudinis numerus E, qui adiecta vni-
Def. 10. tate fiat F; ergo aliquot vnitates A, sumptæ in multi-
Prop. 38. tudine F, sunt minores D, quod est absurdum; igitur
Prop. 39. non est A, maior D. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad D, inueniatur altera minoris inæqualitatis maior data, quæ sit numeri G, multiplicis plani B C, ad numerum H, excedentem ipsum G, quadrato numeri B; sit autem G, multiplex plani B C, secundum I; & vnitatum denominatarum in A, sumantur a prima totidem secundum numerum I; & sumptarum
Prop. 37. sit aggregatum K; constat K, æqualem esse I, denominato per H; & quoniam I, multiplicando planum B C, facit G; ergo vt vnitas ad planum B C, ita se habet I, ad G; sed vnitas ad planum B C, est vt D, ad vnitatē; ergo vt I, ad G, ita est D, ad vnitatem; & G, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad D; ergo ex æquo in perturbata I, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad vnitatem; sed vt I, ad H, ita est K, ad vnitatem; ergo K, ad vnitatem habet maiorem pro-

por-

portionem quam A, ad eamdem vnitatem, maior ergo est K, quàm A, pars, quàm totum, quod est absurdum: non est ergo A, maior D, neque minor. Ergo A, æqualis est ipsi D. Quod, &c.

Idem Aliter.

B. 2. C. 3.

A. 2. 5. F. 8. 11. 14. 17.

D. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ E $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ $\frac{1}{238}$

SInt A, numeri Arithmeticè dispositi à B, cum differentia C; & D, vnitates denominatæ planis A, in infinitum dispositæ, & aggregatæ. Dico D, æquales esse vnitati denominatæ plano B C. Sumantur D, à prima tot, quot sunt vnitates in B, & assumptas proximè sequatur E, cuius ordinis inter numeros A, sit F; & ab E, sumantur D, totidem semper secundum numerum B, sicut à prima; & iterum ab eadem E, sumantur totidem semper secundum numerum F: quia D, sumptę Prop. 35.
ab E, secundum F, semper totidem ad easdem D, sumptas à prima secundum B, semper totidem sunt vt B, ad F; ergo colligendo, omnes D, ab E, ad omnes D, sunt vt B, ad F; & per conuersionem rationis primæ sumptæ D, à prima secundum numerum B, ad omnes D, à prima sunt vt excessus F, B, ad F; est autem excessus F, B, toties multiplex excessus C, quot sunt primæ sumptæ D, videlicet secundū numerum B; quare excessus F, B, est æqualis plano B C; & F, est compositus ex plano B C, & B; sumptæ vero primæ D, secundum numerum B, Prop. 37.
sunt æquales B, denominato per productum ex B, & plano B C, auctum quadrato B; videlicet diuidendo per B, vnitati denominatæ per planum B C, auctum B,

vel

uel unitati denominatæ per F; ergo unitas denominata per F, ad D, eſt ut planum B C, ad F; uel ut unitas denominata per F, ad unitatem denominatam plano B C: ergo ſunt æquales D, & unitas denominata plano B C. Quod, &c.

Theor. 38. Prop. 41.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum quotlibet aſſumptæ a prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, ut planum ſub numero aſſumptarum, & differentia diſpoſitionis Arithmeticæ ad primum eiuſdem diſpoſitionis numerum.

B. 2. C. 3. D. 4.

A. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ ———————

E. $\frac{1}{7}$ F ———————

SInt A, unitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum à B, cum differentia C; quarum aſſumptæ à prima quotlibet ſecundum numerum D, ſint compoſitæ in E; & reliquæ in infinitum diſpoſitæ ſint in F.
Prop. 8. Dico E, ad F, eſſe ut planum C D, ad B. Sunt enim E, æquales D, denominato per productum ex D, & plano
Prop. 19. B C, auctum quadrato B; & A, æquales unitati denominatæ plano B C; ergo E, ad A, ſunt ut D, denominatus per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam plano B C; & diuiden-

uidendo per D, ut unitas denominata per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam per productum ex D, & plano B C; uidelicet ut productum ex D, & plano B C, ad ſeipſum auctum quadrato B; & diuidendo per B, ut productum ex D, in C, ad ſe ipſum auctum numero B; & diuidendo, E, ad F, ſunt ut planum D C, ad B. Quod, &c.

Theor. 39. Prop. 42.

Vnitatum denominatarum planis Arithmeticè diſpoſitorum quotlibet aſſumptæ à prima ad ultimam aſſumptarum ſunt, ut planum numeri multitudinis aſſumptarum, & numeri ordinis eiuſdem cum aſſumpta inter Arithmeticè diſpoſitos ad eorumdem primum.

C. 2. 5. 8. 11. F. 14. G. 17. D. 3.

B $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ E. $\frac{1}{238}$ A. 5.

SInt ſecundum numerum A, totidem in B, diſpoſitæ unitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum a C, cum differentia D, quarum aſſumptarum ultima E; & eiuſdem ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos ſit F, quem ſequatur G. Dico B, ad E, ſe habere ut planum A F, ad C. Quoniam B, ſunt æquales A, denominato per productum ex A, & plano C D, Prop. 37.
auctum quadrato C; & E, eſt unitas denominata plano Prop. 37.

no F G; productum autem ex A, & plano C D, auctum quadrato C, eſt planum C G; ergo B, ad E, ſunt ut A, denominatus plano C G, ad unitatem denominatam plano F G; & multiplicando per G, ut, A denominatus per C, ad uniratem denominatam per F; & diuidendo per A, ut unitas denominata per C, ad unitatem denominatam per planum A F; uidelicet ut planum A F, ad C. Quod, &c.

Theor. 40. Propoſ. 43.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum, qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt differentia ad numerum ordinis aſſumptæ inter Arithmeticè diſpoſitos.

A. 2. 5. 8. 11. D. 14. B. 3.
F. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ C. $\frac{1}{238}$ E G. 5.

VNitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab A, cum differentia B, ſit aſſumpta C, cuius ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos numerus D; & ſuccedentes ipſi C, ſint diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ in E; quæ uerò præcedunt unà cum eadem aſſumpta ſint compoſitæ in F, quarum multitudo G. Dico C, ad E, ſe habere uti B, ad D. Quoniam C, ad F,
Prop. 42. eſt ut A, ad planum G D; & F, ad E, ſunt ut planum G B,
Prop. 41. ad A; ergo ex æquo in perturbata C, ad E, eſt ut planũ G B, ad planũ G D; & diuidẽdo per G, ut B, ad D. Quod, &c.

Theor.

Theor. 41. Prop. 44.

Duarum fractionum, cum denominatores eodem numero excedunt æquemultiplices numeratorum, maior eſt, quæ maioribus numeris exprimitur, & exceſſus eſt fractio, in qua productum eiuſdem numeri & differentiæ numeratorum denominatur plano denominatorum.

I. 5. L. 3. K. 2.
A B
C. 34. E. 4. D. 16.
G. 30. H. 12.

SInt duæ fractiones A, B, quarum denominatores C, D, ſuperant eodem numero E, numeros G, H, æquemultiplices numeratorum I, K; & I, excedat K, per L; ergo G, excedit H; & adiecto E, communi, etiam C, excedit D. Dico A, maiorem eſſe B. Quia G, H, ſunt æquemultiplices I, K; ergo I, ad G, eſt vt K, ad H; & quia G, maior eſt H, maiorem habet proportionem G, ad E, quàm H, ad E; & componendo, G, ad C, quàm H, ad D; & ex æquo I, ad C, quam K, ad D; ergo fractio A, maior eſt B. Dico præterea exceſſum eſſe planum L E, denominatum plano C D. Quoniam I, ad K, eſt vt G, ad H; planum I H, plano K G, eſt æquale: & quoniam E, eſt exceſſus D H; planum I E, eſt exceſ-

H ſus

ſus planorum I D, I H, vel I D, K G: & eadem ratione planum K E, eſt exceſſus planorum K C, H G; ergo idem eſt exceſſus tùm planorum I D, K C, tum etiam planorum I E, K E; cum autem L, ſit exceſſus I, K; ergo L E, eſt exceſſus planorum I E, K E; videlicet exceſſus planorum I D, K C; ſed exceſſus A, B, eſt æqualis exceſſui planorum I D, K C, denominato per planum D C; ergo exceſſus A, B, eſt planum L E, denominatum plano D C, Quod, &c.

Theor. 42. Prop. 45.

Vnitatum, quæ denominantur planis diſpoſitorum Arithmeticè, quctlibet aſſumptæ ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt multiplex differentiæ in Arithmetica diſpoſitione ſecundum multitudinem aſſumptarum ad multiplicem eiuſdem differentiæ ſecundum multitudinem præcedentium auctum primo eiuſdem diſpoſitionis numero.

B. 4. C. 5. Q. 70.

G. 2. D. 3. M. 5. N. 116.

F $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{126}$ A $\frac{1}{266}$ $\frac{1}{456}$ $\frac{1}{696}$ E $\overline{}$ $\overline{}$

I. 10. K. 15. L. 14.

SInt A, aſſumptæ vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum à B, cum differentia

tia C; & multitudo A, ſit D; & ſint E, infinitæ ſuccedentes ipſis A; & F, præcedentes, quarum multitudo G; & ex ductu C, in G, D, fiant I, K; & I, auctus B, ſit L. Dico A, ad E, ſe habere vt K, ad L. Fiat M, aggregatum numerorum G, D; & N, productum B C M, auctum quadrato B. Conſtat F, A, ſimul æquales eſſe Prop. 37. M, denominato per N: ducatur etiam B, in L, & fiat Q: quia L, eſt compoſitus ex B, I; videlicet ex B, & plano G C; etiam Q, compoſitus eſt ex producto BCG, & ex quadrato B: conſtat pariter F, æquales eſſe G, deno- Prop. 37. minato per Q; & A, exceſſui dictarum fractionum, vide- Prop. 44. licet producto ſub D, & quadrato B, denominato per planum QN; ergo A, ad F, A, ſimul ſunt vt productum ex D, & quadrato B, denominatum per QN, ad M, denominatum per N; & multiplicando per N C, vt productũ ex plano D C, & quadrato B, denominatum per Q, ad planum M C; ſunt autem F, A, ſimul ad E, vt M Prop. 41. C, ad B; ergo ex æquo A, ad E, ſunt vt productum ex plano DC, & quadrato B, denominatum per Q, ad B; & diuidendo per B, vt productum DCB, denominatũ per Q, ad vnitatem; videlicet vt productũ DCB, ad Q; eſt autem K, æqualis plano DC; & Q, æqualis plano BL; ergo A, ad E, ſunt vt productum KB, ad productum BL; & diuidendo per B, vt K, ad L. Quod, &c.

✣

Finis Libri Primi.

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ, SEV De Additione Fractionum

LIBER SECVNDVS,

In quo de Fractionibus agitur, quas denominant numeri solidi. Demonstrantur Additiones in propositionibus 4 5 13.20. Quadraturæ verò in 8. 15. 23. 27.

Theorema 1. Propositio 1.

Si quatuor magnitudines binæ se æqualiter excesserint, planum sub maioribus excedit planum sub minoribus plano sub eodem excessu, & aggregato maximæ, & minimæ.

Sit E, excessus A, B, æqualis excessui C, D. Dico excessum planorum A C, B D, æqualem esse plano sub E, & aggregato A, D. Quoniam E, est excessus C, D;

E. 3. A. 5. B. 2. C. 7. D. 4.

C, D; planum E A, est excessus planorum C A, D A: & quoniam E, est excessus A, B; planum E D, est excessus planorum DA, DB: ergo colligendo plana EA, ED, simul sunt æqualia excessibus planorum CA, DA, DA, DB; videlicet vni excessui planorum C A, B D; plana verò E A, E D, sunt æqualia plano sub E, & aggregato A, D; ergo excessus planorum C A, B D, est æqualis plano sub E, & aggregato A, D. Quod, &c.

Theor. 2. Prop. 2.

Numerorum Arithmeticè dispositorum aggregatum est æquale dimidio plani sub multitudine, & aggregato extremorum.

A. 2. 5. 8. 11. 14. B. 17. C. 4. D. 2.

Sint numeri Arithmeticè dispositi, quorum primus A, vltimus B, & multitudo C. Dico aggregatos æquales esse dimidio plani sub C, & aggregato A, B. Sit primo C, par cuius dimidium D; quoniam numeri A, B, & intermedij totidem sunt, quot vnitates in C; ergo bini totidem sunt, quot vnitates in D; bini autem tùm extremi A, B, tùm ab extremis æqualiter distantes inter se sunt æquales; ergo omnes aggregati sunt ad aggregatum extremorum A B, vt D, ad vnitatem; & omnes aggregati sunt æquales plano sub D, & aggregato extremorum; videlicet dimidio plani sub C, & aggregato A, B. Sed

A.2. 5. 8. 11. B.14. C.5. D.4. E.8.

Sed eſto C, impar, & vnitate dempta fiat D, par: quia exceſſus extremorum eſt multiplex exceſſus conſequentium per D; ergo exceſsus extremorum A, B, eſt par; & duplum A, eſt par; ergo aggregatum extremorum A, B, eſt par; cuius dimidium ſit E: igitur E, medius eſt inter Arithmeticè diſpoſitos ab A, ad B; & ad E, bini tùm extremi A, B, aggregati, tùm æqualiter diſtantes ab extremis dupli ſunt; ergo omnes aggregati præter E, ad E, ſunt vt D, ad vnitatem; & componendo omnes ad E, ſunt vt C, ad vnitatem; ergo omnes aggregati ſunt æquales plano ſub E, & C; dimidio videlicet plani ſub aggregato A, B, & C. Quod, &c.

Theor. 3. Prop. 3.

Diſpoſitis Arithmeticè quotcunque numeris, differentia planorum ſub primis, & vltimis ad aggregatum omnium præter primum, & vltimum ſunt, vt duplum exceſſus ad vnitatem.

A.2. B.5. 8. 11. 14. 17. C.20. D.23.
E.3. F.18. G.6. H.3.

NVmerorum Arithmeticè diſpoſitorum duo primi ſint A, B, duo vltimi C, D, & conſequentium exceſsus E. Dico differentiam planorum DC, AB, eſse

ad

ad omnium aggregatum præter A, D, vt duplus E, ad vnitatem. Quoniã ſunt æquales exceſſus D, C, B, A, viciſſim etiã ſunt æquales exceſſus D, B, C, A; ſit F, exceſſus D, B, vel C, A; ergo exceſſus planorum D C, Prop.1.2.
AB, eſt planum ſub I, & aggregato A, D, vel B, C: ſit G, multitudo omnium præter A, D, cuius dimidium H; ergo aggregatum omnium præter A, D, eſt planum ſub Prop.2.2.
H, & aggregato B, C; & eſt planum ſub F, & aggregato B, C, ad planum ſub H, & aggregato B, C, vt F, ad H: & quoniam F, toties continet E, quot G, vnitates; ergo F, ad G, eſt vt E, ad vnitatem; eſt autem G, ad H, duplus; videlicet vt duplus E, ad E; ergo ex æquo in perturbata F, ad H, eſt vt duplus E, ad vnitatem; ergo exceſſus planorum D C, A B, ad aggregatum omnium præter A, D, eſt vt duplus E, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 4. Propoſ. 4.

Diſpoſitis Arithmeticè quotcunque numeris, vnitates denominatæ ſolidis eorumdẽ conſequentium ſunt æquales aggregato ex intermedijs diſpoſitis denominato per planoplanum ex binis extremis.

SInt vnitates quotcunque A, denominatæ ſolidis conſequentium Arithmeticè quomodolibet diſpoſitorũ. Dico A, æquales eſſe aggregato eorumdem diſpoſitorum præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Sint B, totidem exceſſus alternorum in eadem diſpoſitione ijſdem ſolidis denominati: & quia

con-

	3.	5.	7.	9.	11.	13.
A.		$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{1}{693}$	$\frac{1}{1287}$	
B.		$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{315}$	$\frac{4}{693}$	$\frac{4}{1287}$	

conſequentium Arithmeticè diſpoſitorum exceſſus ſunt æquales; etiàm alternorum exceſſus æquales inter ſe ſunt; & ſinguli dupli ſunt ad exceſſum conſequentium; ergo ſingulæ B, ad ſingulas A, ſunt vt duplum exceſſus conſequentium ad vnitatem; & colligendo omnes B, ad omnes A, ſunt vt duplum exceſſus conſequentium ad vnitatem; videlicet, vt exceſſus planorum ſub binis extremis ad aggregatum omnium diſpoſitorum præter extremos; & diuidendo per planoplanum ex binis extremis, vt exceſſus planorum ſub binis extremis eorumdē planoplano denominatus ad aggregatum omnium præter extremos pariter denominatum: ſunt autèm omnes B, æquales exceſſui planorum ſub binis extremis eorumdem planoplano denominato; ergo omnes A, ſunt æquales aggregato omnium præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Quod, &c. Prop. 3. 2.

Theor. 5. Propoſ. 5.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniū conſequentium ab vnitate, quotlibet à prima ſunt æquales producto numeri multitudinis ipſarum in numerum ternario maiorem, denominato per quadruplum eiuſdem producti, addito ſemper 8.

Sint

A. 1.	2.	E. 3.	D. 4.	C. 5.	F. 6.
B.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{60}$		
	G. 18.	I. 80.	K. $\frac{18}{80}$	L. 9.	M. 40.

SInt A, numeri conſequentes ab vnitate; & B, vnitates denominatæ ſolidis conſequentium A; & numerus multitudinis B, ſit E; qui ternario auctus fiat F; & productum ex E, in F, ſit G; cuius quadruplum auctum numero 8. ſit I; & ex denominatione G, per I, fiat fractio K. Dico, quòd aggregatum omnium B, eſt æquale K. Numerorum A, ſint D, C, duo, qui ſequuntur E: quoniam numeri A, terni denominant ſingulas B; ergo multitudo numerorum A, qui denominant B, binario ſuperat multitudinem B; videlicet numerum E; eſt autem C, qui binario excedit E; ergo C, eſt multitudo numerorum A, qui denominant B; & ſunt in A, omnes numeri ab vnitate; ergo diſpoſitorum in A, vſque ad C, ſunt vltimi C, D; primi vnitas, & 2; & extremi vnitas, & C: ſit M, planoplanum ſub D, C, 2. & vnitate; & L, ſit aggregatum reliquorum, præter vnitatem, & C; ergo B, ſunt æquales L, denominato per M: & quia C, binario, & F, ternario excedunt E; ergo F, excedit C, vnitate; & F, æqualis eſt C, & vnitati; vel D, & binario; ergo planū E F, videlicet numerus G, duplus eſt L: item exceſſus plani D C, ſuper binarium (planum videlicet vnitatis, & binarij) duplus eſt eiuſdem L; ergo G, eſt exceſſus plani DC, ſuper binariū; & planū DC, excedit G, per binariū; & quadruplū DC, excedit quadruplū G, per 8: eſt autē I, qui excedit quadruplum G, per 8: ergo I, eſt quadruplum plani D C, vel duplum planoplani ſub D, C, 2. & vnitate: ergo I, eſt duplum M; & G, ad L, eſt vt I, ad M. & permutando, G, ad I, eſt vt L, ad M; ergo L, denominatus per M, videlicet aggregatum omnium B, eſt æquale G, denominato per I, videlicet fractioni K. Quod, &c. Prop 4. 2. Prop. 2. 2. Prop. 3. 2.

I Theor.

Theor. 6. Propos. 6.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium consequentium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt minores quarta parte vnitatis.

1.	2.	3.	D. 4.	5.	6. B. 7.	A. 28.
C.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{120}$		E. 112. F. 120.

SInt C, quotlibet vnitates denominatę solidis omnium cõsequentium ab vnitate sumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores esse quarta parte vnitatis. Fiat B, ternario maior D; & planum B D, sit A; cuius quadruplus E; qui auctus numero 8. sit F: ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & est A, ad E, vt vnitas ad 4. ergo A, ad F, minorem habet, quàm vnitas ad 4. & A, denominatus per F, est minor quarta parte vnitatis; sunt autẽ C, aggregatæ æquales A, denominato per F; ergo C, aggregatæ sunt minores quarta parte vnitatis. Quod, &c. Prop. 5. 2.

Corollarium Primum.

Pr. 15. 1. *Vnde constat vnitates, quæ denominantur solidis omnium numerorum ab vnitate dispositas in infinitum, & aggregatas esse finitæ extensionis.*

Corollarium Secundum.

Patet etiam, quod vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum. Pr. 16. 1.

Probl. 1. Prop. 7.

Datis duobus numeris alium inuenire, qui non minorem vno dato metiatur per se ipsum auctum altero dato.

A. 53.	M. 3.	E. 15.	F. 12.	G. 6.	
B. 212.	C. 221.	D. R. 221.	H. 6.	K. 9.	L. 54.

SInt dati A, M: opportet numerum inuenire, qui non minorem dato A, metiatur per seipsum auctum dato M. Fiat B, dati A, quadruplus; & C, summa ex quadrato M, & B; & numeri C, sumatur latus, vel radix

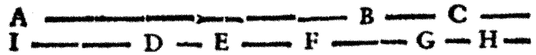
A.53.	M.3.	E.15.	F.12.	G.6.	
B.212.	C.221.	D.℞.221.	H.6.	K.9.	L.54.

quadrata D; & sit numerus E, non minor D; à quo subtrahatur M; & residui F, dimidium sit G; & H, sit numerus non minor G. Dico H, metiri numerum non minorem A, per seipsum auctum numero M; fiat K, aggregatum ex H, & M; & ex ductu H, in K, fiat L; ergo L, est compositus ex quadrato H, & plano M H: & quoniam H, non est minor G; & est duplus G, æqualis F; & F, auctus M, est E; & E, non est minor D; ergo duplus H, auctus M, non est minor D; & quadratum dupli H, aucti M, non est minus C; est autem quadratum dupli H, aucti M, equale quadrato M, quadruplo quadrato H, & quadruplo plano MH; & sunt quadruplum quadratum H, & quadruplus planus M H, æquales quadruplo L; ergo quadratum dupli H, aucti M, est æquale quadrato M, & quadruplo L; ergo quadratum M, & quadruplus L, non sunt minores C; & ablato communi quadrato M, quadruplus L, non est minor B; & diuidendo per 4. numerus L, non est minor A. Inuenimus ergo numerum H, qui metitur L, numerum non minorē A, per se ipsum auctum numero M. Quod, &c.

Theor. 7. Prop. 8.

Vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate in infinitum disposita, & aggregata sunt æquales quartæ parti vnitatis.

Sint



Sint in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate. Dico A, æqualem esse $\frac{1}{4}$. Alias erit A, maior, vel minor $\frac{1}{4}$. sit maior; igitur in aliqua multitudine sumptæ à Cor. 2.
prima vnitates in A, dispositæ implent $\frac{1}{4}$. sit huiusmodi Prop.9.2.
multitudinis numerus B, qui adiecta vnitate fiat C; ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sumptæ à prima in multitudine numeri C, sunt maiores $\frac{1}{4}$. quod est absurdū: Non Prop.9.2.
est igitur A, maior $\frac{1}{4}$. Sit minor, & data proportione mi- Pr.25.1.
noris inæqualitatis A, ad $\frac{1}{4}$, inueniatur altera maior, quę sit numeri I, quem numerus 4. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipsius D, sit octuplus F; & inueniatur Prop.7.2.
numerus G, qui metiatur numerum non minorem F, per se ipsum auctum ternario; & sumantur vnitates in A, dispositæ à prima in multitudine numeri G; & assumptarū summa sit H: constat H, esse portionem ipsius A; & æqua- Prop.5.2.
lem producto ex numero G, in se ipsum ternario auctum denominato per quadruplum eiusdem producti addito 8. quia autem productum ex G, in se ipsum ternario auctū non est minus F; etiam denominatum per quadruplum Pr.44.1.
eiusdem producti addito 8. non est minus F, denominato per quadruplum F, addito 8; & (diuidendo vtrumque numerum fractionis per 8.) non est minus D, denominato per quadruplū D, auctū vnitate; ergo H, non est minor, D, denominato per quadruplum D, auctum vnitate; est autem I, quadruplus D; & I, auctus vnitate est E; ergo H, non est minor D, denominato per E: sed quia D, ad I, est vt vnitas ad 4; vel $\frac{1}{4}$ ad vnitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{4}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus per E, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quam A; maior

igitur

igitur est D, denominatus per E, quam A; & non est H, minor D, denominato per E; ergo H, est maior A, pars, toto; quod est absurdum: non igitur A, minor est $\frac{1}{4}$; neque maior; ergo A, est æqualis $\frac{1}{4}$. Quod, &c.

Theor. 8. Propos. 9.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omniũ numerorum consequentium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima ad succedentes in infinitum sunt, vt productum ex numero multitudinis ipsarum in se ipsum ternario auctum ad binarium.

A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ E ———————
B. 2. C. 5. D. 10. F. 48.

VNitatum denominatarum solidis omnium numerorum consequentium ab vnitate sint A, assumptæ à prima in multitudine B; & residuæ in infinitum sint dispositæ, & aggregatæ in E; & B, ternario auctus sit C; & ex B, in C, fiat D. Dico A, ad E, esse vt D, ad binarium. Fiat F, quadruplum D, auctum 8: constat A, Prop.5.2. æqualem esse D, denominato per F; & aggregatas A,E, Prop.8.2. æquales esse vnitati denominatæ per 4. sed quia, vt vnitas ad 4. ita se habet D, binario auctus ad F; vnitas denominata per 4; videlicet aggregatæ A, E, sunt æquales D, binario aucto denominato per F; ergo A, ad aggregatas A, E, est vt D, denominatus per F, ad D, binario

rio auctum denominatum per F; & (multiplicando per F,) vt D, ad D, binario auctum; ergo diuidendo, A, ad E, est vt D, ad binarium. Quod, &c.

Theor. 9. Prop. 10.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet assumpta à prima ad vltimã assumptarum sunt, vt aggregatum ex cubo numeri multitudinis ipsarum, & triplo quadrati eiusdem ad quaternarium.

B. 4. E. 5. F. 6. D. 7.
A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{60}$ C $\frac{1}{120}$

SInt vnitatum, quæ denominantur solidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet assumptæ A, secundum numerum B; & vltima assumptarum sit C. Dico A, ad C, esse vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Sit D, numerus ternario maior B; & sint E, F, qui proximè succedunt ipsi B, in ordine omnium numerorum ab vnitate: constat F, E, dispositos esse Arithmeticè, vt binarius, & vnitas; & permutando, F, & binarium esse Arithmeticè, vt E, & vnitas; & communem excessum esse B; ergo planum F E, excedit planum sub binario, & vnitate, plano sub B, & aggregato ex F, & vnitate; videlicet plano B D; ergo planum B D, auctum binario est æquale plano F E: & quia B, est multitudo Prop.1.2. ipsa-

B.4. E.5. F.6. D.7.

A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{60}$ C $\frac{1}{12}$

Prop.5.2. ipſarum, A; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum B D, auctum 8; ſed quadruplum B D, auctum 8 eſt quadruplum plani B D, aucti 2; videlicet plani E F; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum E F: quia etiam B, eſt numerus multitudinis A, quarum vltima C; conſtat B, eſſe numerum ordinis C; & binario, ac vnitate minorem eſſe numeris, qui ſolidum producunt denominatorem C; ergo C, eſt vnitas denominata ſolido ſub B, & plano E F; ergo A, ad C, eſt vt planum B D, denominatum quadruplo plani E F, ad vnitatem denominatam ſolido ſub B, & plano E F; & multiplicando per planum E F, vt planum B D, denominatum per 4. ad vnitatem denominatam per B; & iterum multiplicando per B, vt ſolidum ſub quadrato B, & D; videlicet aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, denominatum per 4. ad vnitatem; & multiplicando per 4, vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Quod, &c.

Theor. 10. Prop. 11.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum conſequentium ab vnitate, qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt binarius ad numerum ordinis aſſumptæ.

Sint

B. 3 D $\frac{9}{40}$ A $\frac{1}{60}$ C ————

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate ſit aſſumpta A; cuius ordinis numerus B; & ſuccedentes in infinitum C. Dico A, ad C, eſſe vt binarius ad B. Sit D, aggregatum earum, quæ præcedunt C, à prima; quarum erit A, vltima; & numerus multitudinis ipſarum D, idem, qui ordinis aſſumptæ, videlicet B: ergo A, ad D, eſt vt 4. ad compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B; ſunt autem D, ad C, vt planum ſub B, & ipſo B, ternario aucto; videlicet vt compoſitum ex quadrato B, & triplo B, ad binarium; & multiplicando per B, vt compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad duplum B; ergo ex æquo A, ad C, eſt vt 4. ad duplum B; & diuidendo per 2, vt 2. ad B. Quod, &c. Pr. 10.2. Pr. 9.2.

Theor. 11. Prop. 12.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ non à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex numero multitudinis ipſarum in numerũ ternario maiorem auctus duplo plani ſub eodem numero, & multitudine præcedentium, ad productum ex numero multitudinis præceden-

K tium

tium in numerum ternario maiorem au-ctum binario.

A. 2. B. 3. M. 5. P. 8. E. 40. F. 168.

G $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ H $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{120}$ $\frac{1}{210}$ I ——— ——— ——— ———

K. 30. L. 12. O. 5. C. 10. D. 48.

VNitatum, quæ denominantur solidis omnium numerorum ab vnitate sint assumptæ H, non à prima in multitudine numeri B; quibus in infinitum succedentes I; & præcedentes G, in multitudine numeri A; & productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA, sit K; sit etiam O, ternario maior A, & planus AO, sit C, qui auctus binario fiat L. Dico H, ad I, esse vt K, ad L. Fiat M, aggregatum ex A, B; & P, ternario maior M; & planus PM, sit E; cuius quadruplus auctus numero 8. sit F: ergo M, est multitudo ipsarum Prop. 5. 2. G, H; & sunt G, H, æquales E, denominato per F: fiat etiam D, quadruplus L: quoniam L, excedit C, per binarium; etiam D, excedit quadruplum C, per 8; ergo G, Prop. 5. 2. sũt æquales C, denominato per D; ergo excessus G, & H, supra G, videlicet H, sunt æquales excessui numeri E, denominati per F, supra numerum C, denominatum per D: & quia D, F, excedunt per 8. quadruplos C, E; ergo Pr. 44. 1. excessus fractionũ E, per F, & C, per D, est octuplus excessus E, C, denominatus per planum D F: quoniam etiam 3. est idem excessus tùm P, M, tum O, A; viciffim excessus P, O, est æqualis excessui M, A; videlicet nume-Prop. 1. 2. ro B; ergo excessus planorum PM, OA, videlicet excessus E, C, est æqualis plano sub B, & aggregato A, P; est autem P, æqualis M, & 3; & M, æqualis A, & B; ergo aggregatum A, P, est aggregatum ex B, 3, & duplo A; & planum sub B, & aggregato A, P, est aggregatum ex qua-

quadrato B, triplo B, & duplo plani A B; videlicet productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA; cuiusmodi est numerus K; ergo K, est excessus E, C; & H, sunt æquales octuplo K, denominato per planum DF; ergo H, ad H, G, sunt vt octuplus K, denominatus plano D F, ad E, denominatum per F; & multiplicando per F, vt octuplus K, denominatus per D, ad E; sunt autem G, H, ad I, vt E, ad 2: ergo ex æquo Prop. 9. 2. H, ad I, sunt vt octuplus K, denominatus per D, ad 2; & diuidendo per 2. vt quadruplus K, denominatus per D, ad vnitatem; vel vt quadruplus K, ad D; ergo (quia D, est quadruplus L, diuidendo etiam per 4) H, ad I, sunt vt K, ad L. Quod, &c.

Theor. 12. Prop. 13.

Vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt æquales producto numeri multitudinis ipsarum in numerum binario maiorem, denominato per duodecuplum eiusdem, addito semper 9.

SInt A, impares ab vnitate; quorum solidis denominatæ sint vnitates B; quarum multitudo à prima sit numerus C; & C, auctus binario fiat D; & planus CD, sit E; cuius duodecuplus auctus 9 sit G; & ex denominatione E, per G, fiat fractio H. Dico B, esse æquales H. Sint I, K, vltimi, qui adhibentur in denominatione

A. 1.	3.	5.	I. 7.	K. 9.
B	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{315}$	
C. 3.	D. 5.	E. 15.	G. 189.	H. $\frac{15}{189}$

Prop.4.2. B, ergo B, ſunt æquales aggregato ex omnibus diſpoſitis
in A, vſque ad K, præter vnitatem, & K, denominato
per planoplanum ſub K, I, 3, & vnitate: & quia terni
A, denominant ſingulas B; multitudo diſpoſitorum in
A, vſque ad K, binario maior eſt multitudine B, videli-
cet numero C; ergo numerus C, eſt multitudo omnium
A, vſq; ad K, præter duos extremos vnitatem, & K; &
Prop.2.2. aggregatum eorumdem, præter extremos, eſt dimidium
plani ſub C, & aggregato extremarum vnitatis, & K;
& quoniam inter vnitatem, & K, tot ſunt intermedij,
quot vnitates in C; ergo exceſſus extremorum vnitatis,
& K, ad 2. exceſſum conſequentium eſt vt C, auctus vni-
tate ad vnitatem; & componendo, exceſſus vnitatis, &
K, auctus binario, vel aggregatum ex K, & vnitate ad
2. eſt vt C, auctus 2, videlicet D, ad vnitatem; permu-
tandoq; & conuertendo, D, dimidius eſt aggregati ex K,
& vnitate; & planum CD, vel numerus E, dimidius eſt
Prop.2.2. plani ſub C, & aggregato ex K, & vnitate; ergo E, eſt
aggregatum omnium A, vſq; ad K, præter extremos vni-
tatem, & K: eadem ratione, quia exceſſus vnitatis, &
K, ad 2. eſt vt C, auctus vnitate ad vnitatem; diuiden-
do, exceſſus I, & vnitatis ad 2. eſt vt C, ad vnitatem;
permutandoque, & conuertendo, C, dimidius eſt exceſ-
ſus I, & vnitatis; & duplus C, auctus vnitate eſt I; &
auctus ternario eſt K; & compoſitus ex 3. & quadruplo
quadrati C, & octuplo eiuſdem C, videlicet compoſitus
ex 3. & quadruplo E, eſt planus I K, & (multiplicando
per 3. planum vnitatis & 3.) compoſitus ex 9, & duo-
decuplo E, videlicet numerus G, eſt planoplanum ſub
Prop.5.2. K, I, 3, & vnitate: ergo B, ſunt æquales E, denominato
per G, videlicet fractioni H. Quod, &c.

Theor.

Theor. 13. Prop. 14.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt minores duodecima parte vnitatis.

C. $\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{105}$.	$\frac{1}{315}$.	$\frac{1}{693}$.	
D. 4.	B. 6.	A. 24.	E. 288.	F. 297.

Sint C, quotlibet vnitates denominatę ſolidis omnium imparium ab vnitate ſumptæ in multitudine numeri D, à prima. Dico C, aggregatas minores eſſe $\frac{1}{12}$. Fiat B, binario maior D; & planum B D, ſit A; cuius duodecuplus E; qui auctus numero 9. ſit F. Ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & eſt A, ad E, vt vnitas ad 12. ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam vnitas ad 12. & A, denominatus per F, eſt minor $\frac{1}{12}$. Sunt autem C, aggregatæ æquales A, denomi- Pr.13.2.
nato per F; ergo C, aggregatæ ſũt minores $\frac{1}{12}$. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Vnde conſtat vnitates denominatas ſolidis Pr.15.1.
omnium imparium ab vnitate in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis.

Co-

Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. *Patet etiam, quòd vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum.*

Theor. 14. Prop. 15.

Vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab vnitate, dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales $\frac{1}{12}$.

A ———————————————————

B — C — D — E — F — G — H — I ———

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ unitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate. Dico A, æqualem esse $\frac{1}{12}$. Alias erit A, maior, uel
Cor. 2. pr. 14. 2. minor $\frac{1}{12}$. Sit maior igitur in aliqua multitudine sumptę à prima unitares in A, dispositæ implent $\frac{1}{12}$: sit huiusmodi multitudinis numerus B, qui unitate adiecta fiat C;
Def. 10. ergo aliquot unitates in A, dispositæ sumptæ à prima in
Pr. 14. 2. multitudine numeri C, sunt maiores $\frac{1}{12}$: quod est absurdum:

dum: non est igitur A, maior $\frac{1}{12}$. Sit minor, & data pro- Pr. 25. 1.
portione minoris inęqualitatis A, ad $\frac{1}{12}$, inueniatur altera maior, quæ sit numeri I, quem numerus 12. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipsius D, sit nonuplus
F; & inueniatur numerus G, qui metiatur numerum non Prop. 7. 2.
minorem F, per se ipsum auctum binario, & sumantur vnitates in A, dispositæ à prima in multitudine numeri G; & assumptarum summa sit H: constat H, esse portio-
nem ipsius A; & æqualem producto ex numero G, in se Pr. 13. 2.
ipsum binario auctum denominato per duodecuplum eiusdem producti addito 9: quia autem productus ex G,
in se ipsum binario auctum non est minor F; etiam deno- Pr. 44. 1.
minatus per duodecuplum eiusdem producti addito 9. nõ est minor F, denominato per duodecuplum F, addito 9; & (diuidendo vtrumq; numerum fractionis per 9.) non est minor D, denominato per duodecuplum D, auctum vnitate; est autem I, duodecuplus D; & I, auctus vnitate est E; ergo H, non est minor D, denominato per E: sed quia D, ad I, est vt unitas ad 12. uel $\frac{1}{12}$ ad unitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{12}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, uel D, denominatus per E, ad unitatẽ habet maiorem proportionẽ, quàm A; maior igitur est D, denominatus per E, quàm A; & non est H, minor D, denominato per E; ergo H, est maior A, pars toto, quod est absurdum: Non igitur A, minor est $\frac{1}{12}$, neque maior: ergo A, est æqualis $\frac{1}{12}$. Quod, &c.

Theor. 15. Prop. 16.

Vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima

ma ad succedentes in infinitum sunt, vt quadruplum plani sub numero multitudinis assumptarum, & numero binario maiore ad ternarium.

C —— D —— F —— E ——
A ———— B ————————————

VNitatum, quæ denominantur solidis omnium imparium ab vnitate sint quotlibet assumptę A, in multitudine numeri C, & succedentes in infinitum B, Planus etiam sub C, & numero binario maiore sit D, cuius quadruplus F, & duodecuplus E. Dico A, ad B, esse vt F, ad 3. Et quia C, est multitudo magnitudinum A; & D, est planus sub C, & numero binario maiore, & E, duo-
Pr. 18. 2. decuplus D; ergo A, sunt æquales D, denominato per E,
pr. 18. 2. auctum nouenario; & aggregatæ A, B, sunt æquales vnitati denominatæ per 12. Ergo A, ad aggregatas A, B, sunt vt D, denominatus per E, auctum 9. ad $\frac{1}{12}$. & (multiplicando per 12.) vt E, denominatus per se ipsum auctum 9. ad vnitatem, videlicet vt E, ad E, auctum 9. & diuidendo per 3, vt F, ad F, auctum 3; ergo diuidendo, A, ad B, sunt vt F, ad 3. Quod, &c.

Theor. 16. Propos. 17.

Vnitatum, quæ denominantur solidis imparium ab vnitate, quotlibet assumptæ ad vltimam sunt, vt productum ex quadruplo

quadrati multitudinis assumptarum vnitate minuto in idem quadratum auctum duplo lateris, ad sexcuplum eiusdem lateris auctum ternario.

C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
A. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$ B. $\frac{1}{693}$ H. 297. K. 81. F. 189.

SInt in multitudine numeri E, assumptæ A, vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate; quarum ultima B; & sit G, quadratum ipsius E, auctum duplo lateris eiusdem; & M, quadruplum eiusdem quadrati unitate minutum; & L, sexcuplum eiusdem E, auctum 3. Dico A, ad B, esse ut planum G M, ad L. Sit H, duodecuplum G, auctum nouenario: constat A, Pr. 13. 2.
ęquales esse G, denominato per H: fiat C, unitate minor E; & quadratum C, auctum duplo eiusdem sit D; cuius duodecuplus auctus 9. sit F; quia C, est unitate minor E, numero multitudinis A; constat C, esse multitudinem A, præter B; & A, præter B, æquales, esse Pr. 13. 2.
D, denominato per F: tandem fiat K, nonuplus excessus G, D; constat etiam B, æqualem esse K, denominato per Pr. 44. 1.
planum F H: & quoniam C, est æqualis E, unitate minuto; quadratum C, est æquale unitati, & quadrato E, dempto duplo E; & (adiecto communi duplo C, uel duplo E, binario minuto) quadratum C, una cum duplo C, uidelicet numerus D, æqualis est quadrato E, unitate minuto; est autem G æqualis eidem quadrato aucto duplo E; igitur excessus G, D, est duplus E, auctus unitate; cuius triplus est sexcuplus E, auctus 3; huiusmodi est numerus L; ergo L, est triplus excessus G, D; & excessus G, D, est nona pars numeri K; ergo ex æquo L, ad

C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
A. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$ B. $\frac{1}{693}$ H. 297. K. 81. F. 189.

K, eſt vt 3. ad 9. & conuertendo K, triplus eſt ad L: quia diximus D, æqualem eſſe quadrato E, vnitate minuto; duodecuplus ipſius D, eſt æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 12; & (adiecto communi 9.) duodecuplus D, auctus 9. videlicet numerus F, eſt æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 3; cuius tertia pars eſt quadruplus quadrati E, minutus vnitate; huiuſmodi eſt numerus M; ergo M, tertia pars eſt ipſius F; & conuertendo F, triplus eſt ad M; videlicet, vt K, ad L; permutandoq; & conuertendo K, ad F, eſt vt L, ad M; ergo K, denominatus per F, æqualis eſt L, denominato per M: quia etiam diximus A, æquales eſſe G, denominato per H; & B, æqualem K, denominato per planum FH; ergo A, ad B, ſunt vt G, denominatus per H, ad K, denominatum per FH; & multiplicando per H, vt G, ad K, denominatum per F; videlicet vt G, ad L, denominatum per M; ergo (multiplicando per M,) A, ad B, ſunt ut planum GM, ad L. Quod, &c.

Theor. 17. Prop. 18.

Vnitatũ, quæ denominãtur ſolidis imparium ab vnitate, qualibet aſſumpta ad ſuccedẽtes in infinitum eſt, vt octuplus numeri ordinis aſsumptæ auctus 4. ad quadruplum quadrati eiuſdem vnitate minutum.

Vni-

A $\frac{5}{63}$ B $\frac{1}{315}$ C —— —— —— ——
G 15 E. 3 D. 35. F. 7

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis imparium ab vnitate ſit aſſumpta B; cuius ordinis numerus E; & ipſi B, ſuccedentes in infinitum C; ſit etiam D, quadruplus quadrati E, vnitate minutus; & F, duplus E, auctus vnitate. Dico B, ad C, eſſe vt quadruplus F, ad D. Aggregentur in A, tùm B, tùm quæ ipſam B, præcedunt à prima: quia E, eſt numerus ordinis B; eſt etiã multitudinis collectarum in A: fiat G, æqualis quadrato E, aucto duplo lateris eiuſdem; quoniam igitur B, ad A, ſunt vt ſex- Pr. 17. 2.
cuplum E, auctum 3; videlicet vt triplus F, ad planum G D; ſunt autem A, ad C, vt quadruplum G, ad 3; & Pr. 16. 2.
diuidendo per 4. vt G, ad $\frac{3}{4}$; & multiplicando per D, vt planum G D, ad triplum D, denominatum per 4; ergo ex æquo B, ad C, ſunt vt triplus F, ad triplum D, denominatum per 4; & diuidendo per 3, vt F, ad D, denominatum per 4; & multiplicando per 4, B, ad C, ſunt vt quadruplus F, ad D. Quod, &c.

Theor. 18. Prop. 19.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumpta non à prima, ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt planus numeri aſsumptarum, & numeri binario maioris auctus duplo plani ſub numeris aſsumptarum, & præcedentium, ad planum ſub numero præceden-

tium, & numero binario maiore auctum ſemper fractione in qua 3. denominatur per 4.

A. 3. B. 2. L. 8. M. 12.

D $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$ E. $\frac{1}{693}$ $\frac{1}{1287}$ C —— —— ——

F. 15. K. 20. H. 35. G. 189. I. 429.

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate ſint aſſumptæ E, non à prima in multitudine numeri B; quas in infinitum ſuccedentes C; & præcedentes D, in multitudine numeri A; ſit autem L, planus numeri B, & numeri binario maioris; & M, duplus plani ſub numeris A, B; & F, planus numeri A, & numeri binario maioris. Dico E, ad C, eſſe vt aggregatum L, M, ad F, auctum $\frac{3}{4}$ vnitatis. Fiat G, nouenario maior duodecuplo ipſius F; & H, productus ex aggregato A, B, in numerum binario maiorem; & I, no-
Pr.13.2. uenario maior duodecuplo ipſius H: conſtat D, æquales eſſe F, denominato per G; & D, E, ſimul æquales H, de-
Pr.44.1. nominato per I; & E, æquales nonuplo exceſſus H, F, denominato per planum G I; ſit K, exceſſus H, I; ergo E, ad aggregatas A, E, ſunt vt nonuplus K, denominatus plano G, ad H, denominatum per I; & multiplicando per I, vt nonuplus K, denominatus per G, ad H; & multiplicando per 4. vt quater nonuplus, vel ter duodecuplus K,
Pr.16.2. denominatus per G, ad quadruplum H; ſunt autem aggregatæ A, E, ad C, vt quadruplus H, ad 3; ergo ex æquali E, ad C, ſunt ut ter duodecuplus K, denominatus per G, ad 3; & diuidendo per 3, vt duodecuplus K, denominatus per G, ad vnitatem; & multiplicando per G, vt duodecuplus K, ad G, vel ad duodecuplum F, auctum 9; &

9; &

9; & diuidendo per 12. vt K, ad F, auctum $\frac{9}{12}$, vel $\frac{3}{4}$: & quoniam ſunt quatuor magnitudines A, aggregatum ex A, B, & numeri binario maiores ipſis, eodem exceſſu B,
ſe ſe excedentes; ergo planum ſub maioribus, videlicet Prop.1.2.
H, excedit planum ſub minoribus, videlicet F, plano ſub B, & aggregato ex maxima, & minima, videlicet ex binario, B, & duplo A: planum autem ſub B, & compoſito ex binario, & B, eſt L; & planum ſub B, & duplo A, eſt M; ergo exceſſus H, F, videlicet K, eſt æqualis aggregato L, M; ergo E, ad C, ſunt vt aggregatum L, M, ad F, auctum $\frac{3}{4}$. Quod, &c.

Theor. 19. Prop. 20.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima, ſunt æquales fractioni, cuius numerator eſt multiplex plani ſub multitudine aſſũptarum, & exceſſu aucti exceſſu, & binario, per eamdẽ multitudinem; denominator verò multiplex numeratoris per duplum compoſiti ex quadrato, & numero exceſſus, auctus duplo quadrato compoſiti ex eodem exceſſu, & vnitate.

Sint

A $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{280}$ $\frac{1}{910}$ $\frac{1}{2080}$ $\frac{1}{3952}$ $\frac{1}{6688}$ $\frac{1}{10450}$

B. 3. C. 7. D. 21. E. 24. F. 25. G. 26.

L. 4. N. 22. I. 24. H. 182. K. 4368.

SInt A, vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate cum excessu B, sumptæ in multitudine numeri C; sit autem D, planum C B; & D, auctus B, fit E; quo singulis duabus vnitatibus aucto fiant F, & G: constat G, esse æqualem plano C B, aucto B, & binario: & quia C, est multitudo A; & terni Arithmeticè dispositi denominant singulas A; ergo numerus binario maior C, est multitudo eorum, qui adhibetur in denominatione sumptarum A; & propterea C, multitudo est intermediorum, præter extremos; sed quot sunt intermedij, totuplex est excessus penultimi, & vnitatis ad excessum consequentium; ergo planum B C, videlicet numerus D, est excessus penultimi, & vnitatis; & D, auctus B, videlicet E, est excessus vltimi, & vnitatis; & E, auctus vnitate videlicet F, est vltimus; & G aggregatum extremorum F, & unitatis: ex ductu G, in C,
Pr. 2. 2. fiat H; constat etiam H, esse duplum aggregati intermediorum. Sit I, duplum compositi ex quadrato, & numero B; & ex ductu H, in I, fiat K; & compositum ex B, & unitate fit L; constat L, esse secundum Arithmeticè dispositorum ab unitate. Dico A, æquales esse H, denominato per compositum ex K, & duplo quadrati L. Fiat N, compositus ex D, & vnitate; constat N, esse penultimum Arithmeticè dispositorum ab unitate; ergo dispositionis Arithmeticæ primi sunt vnitas, & L; ultimi uero N, & F; & extremi unitas, & F: quoniam unitas ad duplum B;
pr. 3. 2. vel H, ad duplum plani B H; vel dimidium H, ad planum B H, est vt aggregatum intermediorum ad excessum plani N F, super L, planum unitatis, & L; est autem aggregatum

gatum intermediorum dimidium H; ergo excessus plani N L, super L, est planum B H; & planum N F, est æquale plano B H, & L; & solidum L N F, est æquale solido L B H, aucto quadrato L; quoniam autem L, est æqualis B, & unitati; planum L B, est æquale composito ex quadrato B, & numero B; videlicet dimidio I; ergo solidum L B H, est æquale dimidio plani H I; uidelicet dimidio K; ergo solidum L N F, uel planoplanum unitatis, L, N, & F, est dimidium K, auctum quadrato L; ergo A sunt Pr. 4. 2.
æquales dimidio H, denominato per dimidium K, auctum quadrato L; & multiplicando utrumque numerum fractionis per 2. sunt æquales H, denominato per K, auctum duplo quadrato L. Quod, &c.

Theor. 20. Prop. 21.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt minores vnitate denominata duplo compositi ex quadrato, & numero excessus.

C — — — — — —

D — E — F — G —

SInt C, quotlibet unitates denominatæ solidis omnium Arithmeticè dispositorum ab unitate, sumptæ in qualibet multitudine à prima; & sit D, duplum compositi ex quadrato, & numero excessus dispositionis Arithmeticæ. Dico C, minores esse unitate denominata D. Sit

E,

E, multiplex plani multitudinis assumptarum, aucti numero excessus, & binario, per eamdem multitudinem; & F, multiplex E, per D; & G, duplum quadrati compositi
Pr. 20. 2. ex eodem excessu, & unitate; ergo C, sunt æquales E, denominato per F, auctum G; & C, ad unitatem sunt ut E, denominatus per F, auctum G, ad unitatem; uidelicet ut E, ad compositum ex F, & G; habet autem E, ad compositum ex F, & G, minorem proportionē quàm E, ad F; & E, ad F, est ut unitas ad D; uel ut unitas denominata per D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem habent minorem proportionem, quàm unitas denominata per D, ad eamdem unitatem; ergo C, sunt minores unitate denominata per D. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Pr. 15. 1. ***Vnde constat vnitates denominatas solidis omnium numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis.***

Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. ***Patet etiam, quod vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem minorem extensione dispositarum earundem in infinitum.***

Probl.

Probl. 2. Prop. 22.

Datis tribus numeris, quartum inuenire, qui non minorem primo dato metiatur per planum sui ipsius, & alterius dati, auctum tertio dato.

B. 41. C. 4. D. 2. E. ℞. 168. F. ℞. $2\frac{5}{8}$ G. $\frac{1}{4}$ A. 3.

Sint B, C, D, tres numeri dati, opportet inuenire quartum, qui metiatur numerum non minorem dato B, per planum sui ipsius, & C, auctum D. Aggregati ex quadrato D, & quadruplo plani B C, sit radix quadrata E; quæ diuidatur per duplum C, vt fiat quotiens F: item D, diuidatur per duplum C, vt fiat quotiens G, & sit A, non minor excessu F, G. Dico A, metiri numerum non minorem B, per planum A C, auctum D. Quoniam A, non est minor excessu F, G; ergo aggregatum A G, non est minus F; & (multiplicando per duplum C,) duplum aggregati ex planis A C, G C, non est minus duplo plani F C: & quia G, est quotiens diuisionis D, per duplum C; duplum plani G C, est numerus D: item quia F, est quotiens diuisionis E, per duplum C; duplum plani F C, est E; ergo aggregatum ex duplo plani A C, & D, non est minus E; & quadratum aggregati ex duplo plani A C, & numero D, videlicet aggregatum ex quadruplo planoplani quadratorum A, C, & quadruplo solidi A C D, & quadrato D, non est minus quadrato E, videlicet aggregato ex quadrato D, & quadruplo

druplo plani B C; & (dempto prius communi quadrato D, nec non diuidendo per quadruplum C,) aggregatum ſolidi ſub C, & quadrato A, & plani A D, non eſt minus B: ſed A, metitur aggregatum ſolidi ſub C, & quadrato A, & plani AD, per planum AC, auctum D; ergo A, metitur numerum non minorem B, per planum AC, auctum D. Quod, &c.

Theor. 21. Prop. 23.

Vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum Arithmeticæ diſpoſitionis ab vnitate, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales vnitati denominatæ per duplum compoſiti ex quadrato, & numero exceſſus conſequentiũ eiuſdem diſpoſitionis.

A ———————————— L. 24. M. $\frac{1}{24}$
B — C — I — D — E — F — N. 16. O. 3. P. 5. G ——
H ————————————

SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum Arithmeticæ diſpoſitionis ab vnitate; & ſit L, duplus compoſiti ex quadrato, & numero exceſſus conſequentium eiuſdem Arithmeticæ diſpoſitionis; & M, ſit vnitas denominata per L. Dico, quod A, eſt æqualis M. Aliàs
Coroll. 2. erit A, maior, vel minor M. Sit maior; igitur in aliqua
pr. 21. 2. multitudine ſumptæ à prima vnitates in A, diſpoſitæ
implent M: ſit huiuſmodi multitudinis numerus B, qui

vnitate adiecta fiat C; ergo aliquot vnitates in A, diſpo- Def. 10.
ſitæ ſumptę à prima in multitudine numeri C, ſunt maio-
res M; quod eſt abſurdum: non eſt igitur A, maior M. Pr. 21. 2.
Sit minor; & data proportione minoris inæqualitatis A, Pr. 25. 1.
ad M, inueniatur altera maior, quæ ſit numeri I, quem
L, metiatur per D, ad E, numerum vnitate maiorem; &
& ipſius D, fiat multiplex F, per N, quadratum compo-
ſiti ex exceſſu conſequentium, & vnitate; & datis tribus Pr. 22. 2.
numeris F, exceſſu diſpoſitionis O, & P, aggregato ex
O, & binario, quartus inueniatur G, qui metiatur nu-
merum non minorem F, per planum GO, auctum P; &
ſumantur vnitates in A, diſpoſitæ à prima in multitudi-
ne numeri G; & aſſumptarum ſumma ſit H: conſtat H,
eſſe portionem ipſius A; & æqualem producto ex nume- Pr. 20. 2.
ro G, in planum GO, auctum P, denominato per mul-
tiplex eiuſdem producti ſecundum L, auctum N: quia
autem productus ex G, in planum GO, auctum P, non
eſt minor F; etiam denominatus per ſui ipſius multiplicẽ Pr. 44. 1.
ſecundum L, auctum N, non eſt minor F, denominato per multiplicem F, ſecundum L, auctum N; & (diuidendo vtrumq; numerum fractionis per N,) non eſt minor D, denominato per multiplicem D, ſecundum L, auctum vnitate; eſt autem I, multiplex D, ſecundum L; & I, auctus vnitate eſt E; ergo H, non eſt minor D, denominato per E: ſed, quia D, ad I, eſt vt vnitas ad I; vel vt M, (vnitas denominata per L,) ad vnitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad M; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus per E, ad vnitatem habet maiorem proportionẽ, quam A; maior igitur eſt D, denominatus per E, quàm A; & non eſt H, minor D, denominato per E; ergo H, eſt maior A, pars toto, quod eſt abſurdum: non igitur A, minor eſt M, neque maior: ergo A, eſt æqualis M. Quod, &c.

Theor. 22. Propof. 24.

Vnitates denominatæ solidis numerorũ Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima ad succedentes in infinitum sunt, vt productus ex plano excessus consequentium Arithmeticè dispositorum, & multitudinis assumptarum ducto in se ipsum auctum eodem excessu, & binario, ad compositum ex eodem excessu, & vnitate.

A. 2. B. 3. D. 6. C. 11. L. 22. E. 66. F. 4. I. 12. G. 264. H. 16.
R. $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{286}$ S ——— ——— —— ——— ——— ——— ———

SInt R, quotlibet vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate, cum excessu B, sumptæ à prima in multitudine numeri A; succedentes verò in infinitum sint dispositæ, & aggregatæ in S; & planum AB, sit D; & D, auctus B, & binario sit C; & ex ductu C, in A, fiat L; & ex L, in B, fiat E: constat E, esse productum ex D, in C: sit F, compositus ex B, & vnitate. Dico R, ad S, esse, vt E, ad F. Ducatur F, in B, vt fiat I: constat I, esse compositum ex quadrato, & numero B: ducatur etiam F, in E, vt fiat G: quoniam E, est productus LB; ergo G, est productus L B F; est autem I, productus B F; ergo G, est productus L I: fiat ipsius F, quadratum H: constat R, esse æquales L, denominato per duplum G, auctum duplo H; & aggregatas R, S, æquales esse vnitati denominatæ per duplum I; Ergo R, ad aggregatas R, S, ita se habent vt L, denominatus per duplum G, auctum duplo H, ad vnitatem denominatam duplo I; & multiplicando per 2. vt L, denominatus per G, auctum H, ad vnitatem denominatam per I; & multiplicando per I, vt productum L I, videlicet G, denominatus per G, auctum H, ad vnitatem; & (multiplicando per G, auctum H,) ita se habent R, ad aggregatas R, S, vt G, ad compositum ex G, H; & diuidendo, R, ad S, ita se habent vt G, ad H; uidelicet ut planum F E, ad quadratum F; & (diuidendo per F,) sunt R, ad S, ut E, ad F. Quod, &c.

Pr. 20. 2.
Pr. 23. 2.

Theor. 23. Prop. 25.

Productus duorum laterum est maior, quàm vt ad eorumdem differentiam sit, vt minus latus ad vnitatem; & excessus est minoris lateris quadratus.

A. 5. C. 3. B. 2.

SInt duæ magnitudines A, B; quarum sit B, minor; & differentia C. Dico quod productus AB, minutus quadrato B, ad C, est vt B, ad vnitatem. Quoniã A, æqualis est aggregato C, B; productus AB, est æqualis aggregato producti C B, & quadrati B; ergo productus

ctus AB, minutus quadrato B, eſt æqualis producto C B; eſt autem productus CB, ad C, vt B, ad vnitatem; ergo productus AB, minutus quadrato B, ad C, eſt vt B, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 24. Prop. 26.

Vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum, quotlibet aſſumptæ ſunt minores vnitate denominata ſolido ſub duplo exceſſu, & minimis numeris.

B. 2. C. 5. 8. E. 11. F. 14.
A $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ D. 6.

SInt in A, diſpoſitæ quotlibet vnitates denominatæ ſolidis Arithmeticè diſpoſitorum; quorum primus B; ſecundus C; & duplus exceſſus conſequentium D. Dico A, minores eſſe vnitate denominata ſolido BCD. Arithmeticè diſpoſitorum, qui adhibentur in denominatione vnitatum A, ſint penultimus E, & vltimus F:
Pr. 4. 2. ergo A, ſunt æquales aggregato ex intermedijs, præter B, F, denominato per planoplanum BCEF; ergo A, ad vnitatem ſunt, vt aggregatum ex intermedijs præter B, F, ad planoplanum BCEF; videlicet proportionem habent compoſitã ex proportionibus intermediorũ præter B, F, ad exceſſum planorum EF, BC, & huius exceſſus
Prop. 3. 2. ad planoplanum BCEF: eſt autem proportio intermediorum præter B, F, ad exceſſum planorum E F, B C, eadem

eadem proportioni vnitatis ad D; & proportio exceſſus Pr. 25. 2.
planorum EF, BC, ad planoplanum BCEF, minor proportione vnitatis ad planum BC; vel multiplicando per D, minor proportione D, ad ſolidum D B C; ergo ex æquo proportio intermediorum prçter AF, ad planoplanum BCEF, minor eſt proportione vnitatis ad ſolidum DBC; & aggregatum intermediorum præter B, F, denominatum planoplano BCEF, videlicet A, minor eſt vnitate denominata ſolido DBC. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Vnde conſtat vnitates denominatas ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis. Pr. 15. 1.

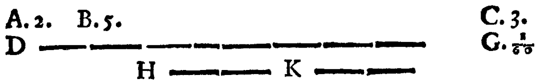
Corollarium Secundum.

Patet etiam, quod vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum in aliqua multitudine ſunt à prima, quæ implent propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarũ earumdẽ in infinitũ. Pr. 16. 1.

Theor.

Theor. 25. Prop. 27.

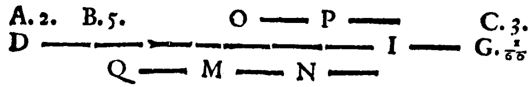
Vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ solido sub duplo excessu, & minimis numeris.



Sint numerorum Arithmeticè dispositorum minimi numeri A, B; quorum excessus C; & vnitates denominatæ solidis eorumdem in infinitum dispositæ, & aggregatæ sint in D; & vnitas denominata solido sub duplo C, & plano AB, sit G. Dico D, esse æqualem G.
Coroll. 2. Alias erit D, maior, vel minor G: sit maior; igitur in ali-
Pr. 26. 2. qua multitudine sumptæ D, à prima implent G: fit huiusmodi multitudinis numerus H, qui vnitate adiecta
Def. 10. fiat K; ergo aliquot dispositæ à prima magnitudines D,
Pr. 26. 2. sumptæ in multitudine numeri K, sunt maiores G; quod est absurdum: non est igitur D, maior G.

Sit D, minor G; & sit defectus I; & vt I, ad G, ita fiat plani AB, quadratus ad Q; & ex diuisione Q, per planũ
Pr. 7. 2. A B, fiat M; & inueniatur numerus N, qui multiplicando se ipsum auctum numero C, producat numerum non minorem

minorem



minorem M; & inter Arithmeticè dispositos inueniantur duo numeri consequentes O, P, maiores numero N; ergo etiam planum O P, maius est plano numeri N, ducti in seipsum auctum numero C; & multò maius est, quam M; & (multiplicando per planum AB,) planoplanum ABOP, maius est solido A B M, videlicet numero Q; est autem numerus Q, ad quadratum plani A B, vt G, ad I; ergo planoplanum ABOP, ad quadratum plani AB, maiorem habet proportionem, quam G, ad I; & per conuersionem rationis, planoplanum ABOP, ad excessum eiusdem suprà quadratum plani AB, minorem habet proportionem,
quàm G, ad D; habet autem excessus planoplani ABO Pr. 25. 2.
P, supra quadratum plani A B, ad excessum planorum O P, A B, proportionem eamdem, quàm planum A B, ad vnitatem; vel eamdem, quàm vnitas ad vnitatem denominatam plano A B; vel (diuidendo per duplum C,) eamdem, quàm vnitas denominata duplo C, ad vnitatem denominatam solido sub duplo C, & AB, videlicet ad G; ergo ex æquali in perturbata planoplanum ABOP, ad excessum planorum O P, A B, minorem habet proportionem, quàm vnitas denominata duplo C, ad D; & conuertendo excessus planorum O PA B, ad planoplanum A B O P, maiorem habet proportionem,
quàm D, ad vnitatem denominatam duplo C; est autem Pr. 3. 2.
aggregatum intermediorum numerorum Arithmeticè dispositorum inter A, P, ad excessum planorum O P, A B, vt vnitus ad duplum C; vel vt vnitas denomina-

ta

ta duplo C, ad vnitatem; ergo ex æquali in perturbata aggregatum intermediorum inter A, P, ad planoplanum ABOP, maiorem habet proportionem, quàm D, ad vnitatem; & aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planoplano ABOP, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quàm D, ad eamdem vnitatem; Ergo aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planoplano ABOP, maius est quàm D:

A. 2. B. 5. O —— P —— C. 3.
D ———————————— I —— G. $\frac{1}{60}$
Q —— M —— N ——
R ——————

quot autem sunt inter A, P, intermedij, totidem assumantur à prima earum vnitatum, quæ in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt in D; quarum assumptarum aggregatum sit R: constat R, esse partem, vel portio-
Pr. 4. 2. nem ipsius D; & constat etiam R, esse æqualem aggregato intermediorum A, P, denominato per planoplanum ABOP; ergo R, est maius D, pars toto, quod est absurdum: non ergo D, est minor G, neque maior; ergo D, est æqualis ipsi G. Quod, &c.

✠

Theor.

Theor. 26. Prop. 28.

Vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum, quotlibet assumptæ ad succedentes in infinitum sunt, vt excessus plani, qui fit à maximis numeris adhibitus in denominatione assumptarum supra planum, qui fit à minimis, ad idem planum à minimis contentum.

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.
F. $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ G. ————————

NVmerorum Arithmeticè dispositorum sint A, B, minimi cum excessu E; & sint F, quotlibet assumptæ, & aggregatæ vnitates denominatæ solidis numerorum dispositorum Arithmeticè ab A, B; & in ipsarum F, denominatione sint adhibiti numeri C, D, maximi; & ipsis F, succedentes in infinitum dispositæ, & aggregatæ sint G. Dico F, ad G, esse vt excessus planorum CD, AB, ad planum AB. Quoniam F, sunt Pr. 4. 2.
æquales aggregato intermediorum Arithmeticè dispositorum inter A, D, denominato per planoplanum AB CD; & G, sunt æquales vnitati denominatæ solido sub Pr. 27. 2.
duplo E, & plano CD; igitur F, ad G, sunt vt aggregatum intermediorum inter A, D, denominatum pla-

 noplano

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.
F. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ G. ————

noplano A B C D, ad vnitatem denominatam ſolido ſub duplo E, & plano CD; & multiplicando per planum C D, ſunt vt aggregatum intermediorum A, D, denominatum plano A B, ad vnitatem denominatam duplo E; & multiplicando per duplum E, vt exceſſus
Pr. 3. 2. planorum C D, A B, (eſt enim exceſſus huiuſmodi multiplex aggregati intermediorum inter A, D, vt duplum E, vnitatis) denominatus plano A B, ad vnitatem; & multiplicando etiam per planum A B, ſunt F, ad G, vt exceſſus planorum CD, AB, ad planum AB. Quod, &c.

Finis Libri Secundi.

NOVAE

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ, SEV De Additione Fractionum

LIBER TERTIVS,

In quo eorum, quæ ſuperioribus Libris demonſtrata ſunt, generaliora traduntur principia.

Theorema 1. Propoſitio 1.

Diſpoſitis quomodolibet magnitudinibus, vt aſſumptis totidem ſemper ſecundum aliquem numerum, ſingula excedant ſingulas præcedentes pariter totidem ſumptas ordinis eiuſdem; ex denominatione huiuſmodi exceſſuum magnitudinum ordinis eiuſdem per productum tùm ex magnitudinibus, quarum ſunt exceſſus, tùm etiam ex inter-

medijs

medijs, fiunt fractiones, quarum aggregatum eſt exceſſus productorum totidem laterum ab extremis hinc inde, denominatus per productum dupli numeri laterum ab ijſdem extremis.

A — B — C — D — E — F — G — H —
I — K — L — M — N — P —
Q — R — S — T — X — Y —

DIſpoſitis quomodolibet magnitudinibus A, B, C, D, E, F, G, vt aſſumptis totidem ſemper ſecundum aliquem numerum, vtpote ſingulæ D, E, F, ſuperent ſingulas totidem ſumptas præcedentes A, B, C, & ſimiliter E, F, G, ſuperent B, C, D, & ſic deinceps; ex denominatione exceſſus D, A, per productum earumdem excedentium D, A, & intermediarum B, C, fiat fractio I; & ſimiliter ex denominatione exceſſuum E, B; F, C; G, D; H, E, per productos B C D E, CDEF, DEFG, EFGH, fiant fractiones K, L, M, N; & quot ſunt A, B, C, vel D, E, F, &c. totidem ſint extremæ maximæ F, G, H, & minimæ A, B, C; & ex denominatione exceſſus producti extremarum hinc inde F G H, ABC, per productum omnium earumdem extremarum ABCF GH, fiat fractio P. Dico I, K, L, M, N, aggregatas æquales eſſe P. Ex totidem ſemper conſequentibus A B C, BCD, &c. fiant producti Q, R, S, T, X, Y: quoniam Q, eſt productum ABC; & R, productum BCD; planum Q R, eſt productum ex productis ABC, BCD; ergo A, D, & productus A B C D, ſunt homologi rationis eiuſdem laterum Q, R, & eorumdem laterum plani QR,

QR,

QR; ergo exceſſus D, A, ad productum ABCD, eſt vt exceſſus R, Q, ad planum Q R; ergo exceſſus D, A, denominatus producto A B C D, videlicet fractio I, eſt æqualis exceſſui R, Q, denominato plano QR: ſimiliter demonſtrabimus K, L, M, N, æquales exceſſibus S, R; T, S; X, T; Y, X, denominatis planis RS, ST, TX, X Y; ergo colligendo I, K, L, M, N, ſunt æquales exceſſibus conſequentium Q, R, S, T, X, Y, denominatis eorumdem conſequentiũ planis; videlicet vni exceſ- Pr. 7. 1. ſui extremorum Y, Q, denominato eorumdem extremorum plano QY: eſt autem Y, productum F G H; & Q, productum A B C; ergo exceſſus Y, Q, denominatus plano QY, eſt æqualis exceſſui productorum FGH, A BC, denominato producto A B C F G H, videlicet fractioni P: ergo I, K, L, M, N, compoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales P. Quod, &c.

Theor. 2. Prop. 2.

Diſpoſitis Arithmeticè magnitudinibus, exceſſus producti quotlibet laterum à maximis extremis, ſuprà productum totidem laterum à minimis extremis, ad aggregatum productorum numeri laterum vnitate minoris factorum ab ijſdem diſpoſitis conſequentibus, præter primam, & vltimam, habet proportionem compoſitam, tùm exceſſus diſpoſitionis, tùm etiam numeri multi-

tudinis

tudinis laterum productorum excedentium ad vnitatem.

A — B — C — D — E — F — G — H —

SInt Arithmeticè diſpoſitæ quotlibet magnitudines A, B, C, D, E, F, G, H; & à maximis extremis fiat productum trium laterum FGH; & à minimis extremis productum totidem laterum A B C. Dico exceſſum productorum F G H, A B C, ad aggregatum productorum duorum laterum, qui fiunt à conſequentibus, præter primam, & vltimam A, H, videlicet ad compoſitum ex planis BC, CD, DE, EF, FG, habet proportionem compoſitam, tùm exceſſus B, A, tùm etiam ternarij numeri multitudinis laterum F, G, H, ad vnitatem. Sit E, in diſpoſitione propoſita proxima minor F: quoniam exceſſus H, E, ad exceſſum B, A, eſt vt 3. multitudo numerorum F, G, H, ad vnitatem; addita communi proportione exceſſus B, A, ad vnitatem, ergo exceſſus H, E, ad vnitatem habet proportionem compoſitã, tùm exceſſus B, A, tùm ternarij ad vnitatem: ducatur E, in proximas maiores magnitudines F, G, vt fiat EFG, productus totidem laterum, quot eſt FGH; ergo planum FG, ad productum EFG, eſt vt vnitas ad E; eſt autem productus EFG, ad productum FGH, vt E, ad H; & diuidendo, productus EFG, ad exceſſum productorum F G H, EFG, vt E, ad exceſſum H, E; ergo ex æquali planum FG, ad exceſſum productorum FGH, EFG, eſt vt vnitas ad exceſſum H, E; & conuertendo, exceſſus productorum F G H, E F G, ad planum F G, eſt vt exceſſus H, E, ad vnitatem: ſimiliter demonſtrabimus, quòd ſinguli exceſſus productorum EFG, DEF, CDE, BCD, ABC, ad ſingula plana EF, DE, CD, BC, AB, ſunt vt

exceſſus

exceſſus H, E, ad vnitatem: ergo colligendo, exceſſus productorum FGH, ABC, ad aggregatum planorum AB, BC, CD, DE, EF, FG, eſt vt exceſſus H, E, ad vnitatem; videlicet proportionem habet compoſitam, tùm exceſſus B, A, tùm etiam numeri multitudinis laterum F, G, H, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 3. Prop. 3.

Diſpoſitis Arithmeticè quotlibet magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem ſemper conſequentium, ſunt æquales aggregato productorum numeri laterum binario minoris, factorum ab ijſdem diſpoſitis conſequentibus, præter primam, & vltimam, denominato per planum ſub duobus totidem hinc inde extremarum productis numeri laterum vnitate minoris.

A — B — C — D — E — F — G —
H — I — K — L — M —
N — O — P — Q — R —

SInt diſpoſitæ Arithmeticè magnitudines quotcunq; A, B, C, D, E, F, G; & vnitates denominatæ productis earumdem (ex.gr.) quaternarum ſint H, I, K, L; & aggregatum productorum ex binis ijſdem, præter primam A, & vltimam G, denominatum per planum ſub

O duobus

A — B — C — D — E — F — G —
H — I — K — L — M —
N — O — P — Q — R —

duobus ternorum laterum hinc inde extremorum productis ABCEFG, ſit M. Dico, quod H, I, K, L, ſunt æquales M. Sumantur A, B, C, D, E, F, G, ternæ; & ſingularum, quæ ternę ſumuntur exceſſus ſupra ſingulas præcedentes denominentur productis earumdem, quarum ſunt exceſſus, & intermediarum (qui producti ſunt ſinguli quaternorum laterum) vt fiant fractiones N, O, P, Q, & exceſſus productorum à ternis hinc inde extremis EFG, ABC, denominatus omnium earumdẽ extre-
Pr. 1.3. morum producto ABCEFG, ſit R; ergo N,O,P,Q, ſunt æquales R: & quia N, O, P, Q, ſinguli ſunt exceſſus earum, quæ ternæ ſumuntur denominati productis quaternarum (vt exceſſus D, A, denominatus producto AB CD,) & H, I, K, L, ſingulæ ſunt vnitates denominatæ ſimiliter; ergo ſinguli N, O, P, Q, ad ſingulas H,I,K,L, ſunt vt exceſſus D, A, ad vnitatem; videlicet proportionem habent compoſitam exceſſus D, A, ad exceſſum conſequentium B, A, & huius ad vnitatem: eſt autem exceſſus D, A, ad exceſſum B, A, vt 3. ad vnitatem; ergo exceſſus D A, ad vnitatem habet compoſitam proportionem tùm exceſſus B, A, tùm etiam 3. ad vnitatem:
Pr. 2 3. quæ compoſita eadem eſt proportioni exceſſus productorum trium laterum ab extremis factorum EFG,ABC, ad aggregatum productorum ex binis ijſdem, præter A, G; & (diuidendo per productum omnium extremarum ABCEFG,) eadem eſt proportioni R, ad M: ergo ſingulæ magnitudines N, O, P, Q, ad ſingulas H, I, K, L, ſunt vt R, ad M; & colligendo omnes, N, O, P, Q, ad omnes H, I, K, L, ſunt vt R, ad M; & permutando,

do, quia N, O, P, Q, ſunt æquales R; etiam H, I, K, L, ſunt æquales M. Quod, &c.

Theor. 4. Propoſ. 4.

Diſpoſitis Arithmeticè quotlibet magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem ſemper in diſpoſitione, ſunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum ex minimis numeri laterum vnitate minoris, tùm ad numerum laterũ eiuſdem producti, tùm etiam ad exceſſum diſpoſitionis Arithmeticæ.

B — C — D — — E — F — G —
A — — — — — — — — — — H —

SInt diſpoſitæ Arithmeticè quotlibet magnitudines, quarum B, C, D, minimæ; & E, F, G, maximæ, cum exceſſu H; & vnitates denominatæ productis quatuor ſemper laterum ſint A. Dico, quòd A, ſunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum BCD, tùm ad 3. numerum laterum B, C, D, tùm etiam ad H. Quoniam B, C, D, &c. ſunt Arithmeticè diſpoſitæ, ergo A, ſunt Pr. 3.3.
æquales aggregato productorum duorum ſemper laterũ ex ipſis diſpoſitis præter B, G, denominato per planum

B —— C —— D —— —— E —— F —— G ——
A —————————————————— H —

ex productis trium laterum BCD, EFG: ergo A, ad vnitatem sunt vt aggregatum productorum duorum semper laterum ex dispositis præter B, G, ad planum ex productis trium laterum BCD, EFG; videlicet proportionem habent compositam dicti aggregati productorum duorum laterum à consequentibus præter B, G, ad differentiam productorum trium laterum ab extremis EFG, BC D, & huiusmodi differentiæ ad eorumdem productorum
Pr. 2. 3. planum BCDEFG; aggregatum autem productorum duorum laterum à consequentibus ad differentiam productorum trium laterum ab extremis proportionem habet compositam vnitatis tùm ad 3. numerum laterum B CD, tùm etiam ad H; ergo A, ad vnitatem habent proportionem compositam vnitatis tùm ad 3. tùm ad H, & differentiæ productorum EFG, BCD, ad productum
Pr. 25. 2. BCDEFG: quoniam autèm productum BCDEFG, maius est quàm vt ad differentiam productorum EFG, BCD, eamdem habeat proportionem, quam productus BCD, ad vnitatem; conuertendo, differentia productorum EFG, BCD, ad productum BCDEFG, minorem habet proportionem, quàm vnitas ad productum BCD; ergo (addendo communem proportionem compositam vnitatis tùm ad 3. tùm etiam ad H,) A, sunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compositam vnitatis tùm ad productum BCD, tùm ad 3. numerum laterum BCD, tùm etiam ad H. Quod, &c.

✠

Corol-

Corollarium Primum.

Vnde constat, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem semper magnitudinum Arithmeticè dispositarũ, quotlibet assumptæ sunt minores vnitate denominata solido sub producto à minimis numeri laterum vnitate minoris, sub eodem laterum numero, & sub excessu dispositionis.

Corollarium Secundum.

Constat præterea, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem semper magnitudinum Arithmeticè ordinatarum, in infinitum disposita, & aggregata sunt extensionis finita. Pr. 15. 1.

Corollarium Tertium.

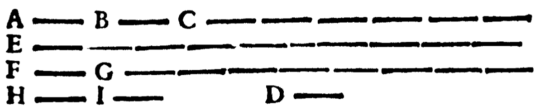
Manifestum tandem est, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem semper Pr. 16. 1.

magni-

magnitudinum Arithmeticè ordinatarũ, in aliqua multitudine ſunt à prima, quæ propoſitam implent extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum.

Theor. 5. Prop. 5.

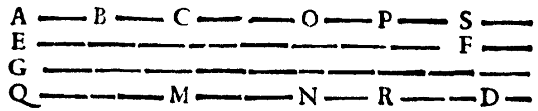
Diſpoſitis Arithmeticè magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem ſemper in diſpoſitione, ordinatæ in infinitum, & compoſitæ ad vnitatem habent proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum ex minimis numeri laterum vnitate minoris, tùm ad numerum laterum eiuſdẽ producti, tùm etiam ad exceſſum diſpoſitionis Arithmeticè.



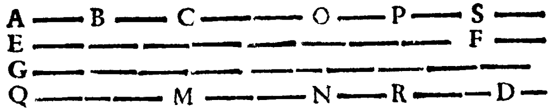
Magnitudinum Arithmeticè diſpoſitarũ in infinitum ſint minimæ ABC, & exceſſus D; vnitates autem denominatæ productis quatuor ſemper laterum ordi-

ordinentur, & aggregentur in E. Dico, quod E, ad vnitatem habet proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum ABC, tùm ad 3. numerum laterum ABC, tùm etiam ad exceſſum D. Alias E, maior, eſt vel minor, quàm vt ad vnitatem habeat eamdem proportionẽ compoſitam: ſit maior; & ſit exceſſus F; & ab E, deducto F, relinquatur G; ergo G, ad vnitatem habet prædictam proportionem compoſitam: quoniam E, maior eſt G; ergo in aliqua multitudine ſumptæ à prima magnitudines in E, diſpoſitæ implent G: ſit huiuſmodi multitudinis numerus H; qui adiecta vnitate fiat I; ergo magnitudines in E, diſpoſitæ ſumptæ in multitudine I, ſunt maiores G; videlicet ſunt maiores, quàm vt ad vnitatẽ habeant prædictam proportionem compoſitam; quod eſt abſurdum: ergo E, non eſt maior, quàm vt ad vnitatem habeat proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum A B C, tùm ad 3. numerum laterum A B C, tùm etiam ad exceſſum D.

Coroll. 3. prop. 4. 3.
Def. 10.
Coroll. 1. prop. 4. 3.



Sit E, minor G; & ſit defectus F; & vt F, ad G, ità fiat producti A B C, quadratus ad Q; & ex diuiſione Q, per productum ABC, fiat quotiens M; & magnitudinis M, tamquàm producti totidem laterum æqualium, quot ſunt A B C, latus inueniatur, vtpote radix cubica, quæ ſit N; & inter magnitudines Arithmeticè diſpoſitas inueniantur tres, vel quot ſunt A, B, C, totidem magnitudines conſequentes O, P, S, maiores prædicta radice N: ergo productum O, P, S, maius eſt producto totidem laterum æqualium ipſi N, videlicet magnitudine



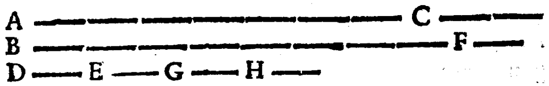
gnitudine M; & multiplicando per productum A B C,
productum ABCOPS, maius eſt producto ABCM, vi-
delicet Q; eſt autem Q, ad quadratum producti ABC,
vt G, ad F; ergo productum ABCOPS, ad quadratum
producti ABC, maiorem habet proportionem, quam G,
ad F; & per conuerſionem rationis, productum ABCO
PS, ad exceſſum eiuſdem ſupra quadratum producti A
BC, minorem habet proportionem, quàm G, ad E; ha-
Pr.25.2. bet autèm exceſſus producti ABCOPS, ſupra quadra-
tum producti A B C, ad exceſſum productorum O P S,
ABC, proportionem eamdem, quam productus ABC,
ad vnitatem; qua communi adiecta, productus ABCO
PS, ad exceſſum productorum OPS, ABC, minorem ha-
bet proportionem, quàm compoſita G, ad E, & produ-
Prop.2.3. cti ABC, ad vnitatem; ſed exceſſus productorum OPS,
A B C, ad aggregatum productorum duorum laterum
conſequentium inter Arithmeticè diſpoſitas præter A,S,
habet proportionem compoſitam tùm 3. numeri laterum
A B C, tùm etiam exceſſus D, ad vnitatem; qua etiam
communi adiecta, productus ABCOPS, ad aggregatum
productorum duorum laterum conſequentium præter
A, S, habet minorem proportionem, quàm compoſita
G, ad E, & producti ABC, ad vnitatem, necnon com-
poſita tùm numeri 3, tùm etiam exceſſus D, ad vnitatem;
& eſt compoſita tùm producti ABC, tùm numeri 3. tùm
etiam exceſſus D, ad vnitatem æqualis proportioni vni-
tatis ad G; quæ compoſita proportioni G, ad E, facit
proportionem vnitatis ad E; ergo productus ABCOPS,
ad

ad aggregatum productorum duorum laterum conſe-
quentium præter A, S, habet minorem proportionem,
quàm vnitas ad E: ſed productus ABCOPS, ad aggre-
gatum productorum duorum laterum conſequentium
præter A, S, eſt vt vnitas ad aggregatum productorum
duorum laterum conſequentium præter A, S, denomi-
natum producto ABCOPS, quæ quidem fractio voce-
tur R; ergo vnitas ad R, habet minorem proportionem,
quàm ad E; & propterea R, eſt maior E: tandem quot
ſunt producti duorum laterum conſequentium præter
A, S, totidem aſſumantur à prima earum vnitatum, quæ
in infinitum ordinatæ ſunt, & compoſitæ in E: conſtat Prop.1.3.
R, eſſe aggregatum huiuſmodi aſſumptarum; & propte-
rea R, eſſe portionem extenſionis E, maiorem, minoris;
quod eſt abſurdum: non ergo E, minor eſt, neque maior;
ergo idem eſt, quod ad vnitatem habet proportionem
compoſitam vnitatis tùm ad productum ABC, tùm ad 3.
numerum laterum A B C, tùm etiam ad exceſſum D.
Quod, &c.

Theor. 6. Prop. 6.

In facta diſpoſitione continua magnitudinum procedentium in infinitū, differentiæ denominatæ planis diſpoſitæ, & aggregatæ infinitæ ſunt æquales vnitati denominatæ magnitudine, quæ eſt principium diſpoſitionis.

SIt diſpoſitio continua magnitudinum procedentium
in infinitum ab A; & differentiæ denominatæ planis



in huiuſmodi diſpoſitione ordinentur in infinitum, & componantur in B. Dico quòd B, ſunt æquales vnitati denominatæ per A. Sunt enim B, extenſionis finitæ: nam aſſumptis quotlibet à prima, & in denominatione vltimæ aſſumptarum adhibita C, vna ex diſpoſitis ab A:
Pr. 7. 1. conſtat aſſumptas æquales eſſe differentiæ C, A, denominatæ plano CA; & ad vnitatem ſe habere vt differentia C, A, ad planum CA; & conuertendo, vnitatem eſſe ad aſſumptas vt planum CA, ad differentiam C, A: ſed maiorem habet proportionem planum CA, ad differentiam C, A, quàm A, ad vnitatem; vel maiorem quàm vnitas ad vnitatem denominatam per A; ergo unitas ad aſſumptas maiorem habet proportionem quàm ad unitatem denominatam per A; & propterea quotlibet aſ-
Pr. 15. 1. ſumptæ ſunt minores vnitate denominata per A: ergo B, ſunt extenſionis finitæ. Igitur ſi B, non ſunt æquales vnitati denominatæ per A, neceſſariò maiores erunt, vel minores: ponantur maiores; & quoniam B, ſunt exten-
Pr. 16. 1. ſionis maioris vnitate denominata per A; ſumi poſſunt in aliqua multitudine à prima, vt impleant vnitatem denominatam per A; ſit huiuſmodi multitudinis numerus
Def. 10. D, qui adiecta vnitate fiat E; ergo B, ſumptæ in multitudine numeri E, ſunt maiores vnitate denominata per A; quod eſt contra ea, quæ ſuperius demonſtrata ſunt: non ergo B, ſunt maiores vnitate denominata per A.

Supponantur minores; & ſit defectus F; & ut F, ad unitatem denominatam per A, ita fiat A, ad G; & inter numeros diſpoſitos ab A, inueniatur C, numerus maior G; ergo C, ad A, maiorem habet proportionem quàm

G, ad

G, ad A; uel quàm unitas denominata per A, ad F; & per conuerſionem rationis, & conuertendo, exceſſus C, A, ad C, maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem denominatam per A; ſed C, ad planum AC, eſt ut unitas ad A, uel ut unitas denominata per A, ad unitatem; ergo ex æquali exceſſus C, A, ad planum AC, maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem: eſt autē exceſſus C, A, ad planum A C, ut exceſſus C, A, denominatus plano A C, ad unitatem; ergo exceſſus C A, denominatus plano AC, ad unitatem habet maiorem proportionem, quàm B, ad unitatem: Aſſumantur ex fractionibus diſpoſitis in B, tot ut inter aſſumptas habeatur ea, in cuius denominatione adhibetur magnitudo C; & aſſumptarum ſit aggregatum H: conſtat H, eſſe portionem B; & eſſe æqualem exceſſui C, A, denominato Pr. 7. 1.
plano AC; & propterea H, ad unitatem habere proportionem maiorem quàm B; & H, maiorem eſſe B, partem toto; quod eſt abſurdum: non ergo B, ſunt minores unitate denominata per A; ſed neque maiores: ergo B, ſunt æquales unitati denominatæ per A. Quod, &c.

Theor. 7. Prop. 7.

Diſpoſitis quomodolibet magnitudinibus procedentibus in infinitum, vt aſſumptis totidem ſemper ſecundùm aliquem numerum ſingulæ excedant ſingulas præcedentes pariter totidem ſumptas ordinis eiuſdem; ex denominatione huiuſmodi exceſſuum ma-

gnitu-

gnitudinũ ordinis eiusdem per productum tùm ex magnitudinibus, quarum sunt excessus, tùm etiam ex intermedijs fiunt fractiones, quæ in infinitum disposita, & aggregata sunt æquales vnitati denominatæ producto totidem magnitudinum, quæ sunt in principio dispositionis.

A. B — C — D — E — — — O — P — R — S —
F
I. G — H — — — — V — —
K

Sit A, dispositio magnitudinnm in infinitum procedentium, ut sumptis exempli gratia ternis quibuslibet, singulæ excedant singulas præcedentes ordins eiusdem; & sint primæ tres B, C, D; & quarta sequens E; & sit F, dispositio infinitarum fractionum, in quibus prædicti excessus denominantur productis ex magnitudinibus tùm excedentibus, tùm intermedijs; quarum fractionum prima est excessus E, B, denominatus producto BCDE. Dico quod F, æqualis est unitati denominatæ producto BCD. Est enim F, extensionis finitæ: nam assumptis in F, quotlibet à prima in denominatione ultimæ assumptarum adhibeantur O, P, R, S, magnitudines in A, dispositæ; & ex ternis consequentibus BCD, CDE, alijsq; deinceps dispositis in A, utpote etiam ex PRS, fiant producti G, H, & deinceps alij, vtpote etiam V;
Pr. 1.3. quorum dispositio in infinitum sit I; constat assumptas æquales esse differentiæ V, G, denominatæ plano V, G, & ad vnitatem se habere vt differentia V, G, ad planum GV;

GV; & conuertendo, vnitatem esse ad assumptas vt Pr. 25. 1.
planum GV, ad differentiam V, G: sed maiorem habet proportionem planum GV, ad differentiam V, G, quàm G, ad vnitatem; vel quàm vnitas ad vnitatem denominatam per G; ergo vnitas ad assumptas maiorem habet proportionem quàm ad vnitatem denominatam per G; & propterea quotlibet assumptæ sunt minores vnitate denominata per G: ergo F, est finitæ extensionis. Præ- Pr. 15. 1.
terea differentiæ denominatæ planis in I, disponantur in serie K; quarum prima est excessus H, G, denominatus plano GH: & quoniam magnitudines A, procedunt in infinitum; etiam producti earumdem I, procedunt in infinitum; ergo K, est extensionis finitæ; & æqualis Pr. 6. 3.
est vnitati denominatæ per G: & cum G, sit productum B, in CD; & H, productum E, in CD; erit planum GH, productum BCDE, in CD: ergo GH, & planum GH, sunt homologa rationis eiusdem B, E, & producti BCDE: ergo excessus H, G, ad planum GH, est vt excessus E, B, ad productum BCDE; & fractio, in qua excessus H, G, denominatur plano GH, videlicet prima dispositarum in K, æqualis est fractioni, in qua excessus E, B, denominatur producto BCDE, videlicet primæ dispositarum in F: similiter demonstrabimus easdẽ singillatim magnitudines tùm in K, tùm in F, esse dispositas, & sunt ambæ dispositiones K, & F, extensionis
finitæ, vt probauimus; ergo K, & F, congruunt Ax. 2.
inter se: cum ergo K, sit æqualis vnitati denominatæ G, videlicet producto BCD; etiam F, est æqualis vnitati denominatæ producto BCD.
Quod, &c.

✠

Probl.

Probl. I. Prop. 8.

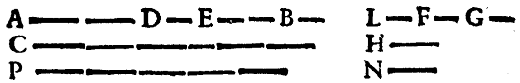
Datis extremis inæqualibus, intermediam inuenire, cuius, & vnius extremarum differentia plano denominata sit æqualis alij datæ magnitudini, quæ sit minor differentia extremarum plano denominata.

A. 8. G. 7. B. 3. E $\frac{1}{7}$ F. 1 $\frac{1}{7}$
D. $\frac{1}{56}$ H. $\frac{4}{21}$ C. $\frac{5}{24}$

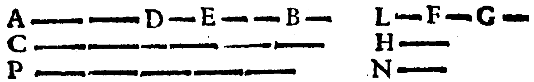
DAtæ ſint inæquales extremæ A, B; quarum differentia plano denominata ſit C; & data ſit alia magnitudo D, minor C. Oportet extremas A, B, intermediam inuenire; cuius, & A, differentia plano denominata ſit æqualis D. Vel eſt A, maior B; vel minor: ſit maior; & ex multiplicatione DA, fiat E; qui auctus vnitate ſit F; & per F, diuidendo A fiat quotiens G. Dico, quòd G, eſt intermedia A, B, & quod exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D. Quoniam G, multiplicando F, producit A; & multiplicando aggregatum E, & vnitatis producit aggregatũ plani GE, & G; eſt autem F, æqualis E, & vnitati; igitur A, eſt æqualis plano GE, & G; & A, eſt maior G; ergo communi ablata G, exceſſus A, G, eſt æqualis plano GE; & diuidendo per G, exceſſus A, G, denominatus per G, eſt æqualis E; videlicet plano DA; & diuidendo per A, exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D: non eſt autem G, æqualis, neque minor B; nam exceſſus A, G, plano denominatus, videlicet D, æqualis eſſet vel maior C, contrà hipotheſim; ergo G, eſt intermedius A, B; & exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D. Sit A, minor B; & conuertendo, B, maior A; & quoniam D, eſt minor C; ſit defectus H, & inueniatur E, intermedius B, A, vt exceſſus B, E, plano denominatus æqualis fiat H: quoniam A, E, B, ſunt magnitudines continuè diſpoſitæ; aggregatum differentiarum A, E; E, B, planis denominatarum eſt æquale C; videlicet aggregato D, H; eſt autem differentia E, B, plano denominata æqualis H; ergo reſidua differentia, videlicet defectus A, E, plano denominatus eſt æqualis D. Quod, &c.

Theor. 8. Prop. 9.

In continua diſpoſitione magnitudinum infinitarum inter extremas quaſpiam magnitudines ab vna ad alteram procedentium, differentiæ planis denominatæ diſpoſita in infinitum, & aggregatæ, ſunt æquales vni differentiæ extremarum plano denominatæ.



SInt diſpoſitæ quomodolibet magnitudines infinitæ in continua diſpoſitione procedentes inter extremas



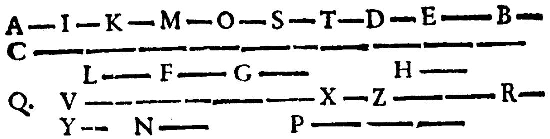
mas A, B, ab A, quæ ſit in principio diſpoſitionis ad B; & infinitæ differentiæ planis in diſpoſitione denominatę aggregentur in C; & ſit L, differentia A, B; & ex denominatione L, per planum A B, fiat H. Dico, quòd C, eſt æqualis H. Eſt enim C, extenſionis finitæ: nam aſſumptis in C, quotlibet à prima in denominatione vltimæ aſſumptarum adhibeantur D, E, magnitudines inter
Prop.7.1. A, B, diſpoſitæ: conſtat, quòd aſſumptæ ſunt æquales
Prop.7.1. differentiæ denominatæ plano AE; eſt autem differentia denominata plano AE, vnà cum differentia denominata plano E B, æqualis H; ergo differentia denominata plano A E, minor eſt H; & propterea quotlibet aſſumptæ
Pr.15.1. ſunt minores H: igitur C, eſt finitæ extenſionis. Iam ſi C, non eſt æqualis H, neceſſariò maior erit, vel minor: ſit maior; & quoniam C, eſt maioris extenſionis H; ſumi poſſunt ex magnitudinibus diſpoſitis in C, aliquot à prima, vt impleant H: ſumantur, & ſit ipſarum multi-
Def.10. tudinis numerus F; qui vnitate adiecta fiat G; ergo C, ſumptæ à prima in multitudine numeri G, ſunt maiores H; quod eſt contrà ſuperius demonſtrata: non eſt ergo C, maior H. Sit minor; & inueniatur D, intermedia extremas A, B; vt differentia A, D, plano denominata ſit
Prop.8.3. æqualis C; ergo differentia A, D, eſt minor L: & quoniã ab A, ad B, ſunt diſpoſitæ magnitudines infinitæ; etiam differentiæ in ea diſpoſitione ſunt infinitæ; & ſimul compoſitæ ſunt æquales vni differentiæ extremarum L; ergo vel prima ex huiuſmodi differentijs eſt maior differentia
Pr.16.1. A, D; vel ſi minor plures à prima ſumptæ ſecundùm aliquem numerum implent differentiam A, D; qui numerus vnitate

vnitate adiecta fiat N; ergo differentiæ in diſpoſitione A, ad B, ſumptæ à prima ſecundùm numerũ N, ſunt maiores differentia A, D: ſumantur igitur ſecundùm numerum N, magnitudines ab A, diſpoſitæ ad B, præter A; & aſſumptarum ſit vltima E; totidemque ſumantur ex fractionibus diſpoſitis in C; quarum aggregatum ſit P: conſtat P, eſſe portionem ipſius C; & differentiam A, E, maiorem differentia A, D; & propterea differentiam A, Prop.7.1.
E, plano denominatam, videlicet P, eſſe maiorem differentia A, D, plano denominata, videlicet C; ergo portio eſt maior toto; quod eſt abſurdum: non eſt ergo C, minor H; ſed neque maior: ergo C, eſt æqualis H. Quod, &c.

Theor. 9. Propoſ. 10.

In continua diſpoſitione magnitudinum infinitarum inter extremas à prima ad vltimam procedentium, differentiæ illarum, quæ diſtant æquali ordinis interuallo denominatæ productis tùm earumdem, quarum ſunt differentiæ, tùm etiam intermediarum, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales differentiæ inter productum numeri laterum vnitate minoris ab ijs, quæ ſunt in principio diſpoſitionis, & homogeneam poteſtatem ab vltima, denominatæ plano ſub ijſdem producto, & poteſtate.

Q Sint



SInt diſpoſitæ quomodolibet magnitudines infinitæ
in continua diſpoſitione procedentes inter extremas
A, B, ab A, I, K, M, O, quæ ſint in principio diſpoſitio-
nis ad B; & infinitæ differentiæ illarum, quæ diſtant
æquali ordinis interuallo, vtpote ſemper binis relictis
differentiæ A, M; I, O, &c. denominatæ productis
AIKM, IKMO, &c. aggregentur in C; & ſit Q, diſpo-
ſitio productorum numeri laterum vnitate minoris AIK,
IKM, KMO, &c. in qua quidem diſpoſitione ſit V, pro-
ductum AIK; & R, poteſtas totidem laterum à B; diffe-
rentia verò R, V, ſit L; ex cuius denominatione per pla-
num RV, fiat H. Dico quod C, eſt æqualis H. Eſt enim
C, extenſionis finitæ; nam aſſumptis in C, quotlibet à
prima, in denominatione vltimæ aſſumptarū adhibean-
tur S, T, D, E, magnitudines inter A, B, diſpoſitæ; & in
Prop. 1. 3. diſpoſitione Q, ſint X, Z, producta STD, TDE: conſtat,
quòd aſſumptæ ſunt æquales differentiæ denominatæ
Prop. 7. 1. plano VZ; eſt autem differentia denominata plano VZ,
vnà cum differentia denominata plano ZR, æqualis H;
ergo differentia denominata plano VZ, minor eſt H; &
propterea quotlibet aſſumptæ à prima ex diſpoſitis in C,
Pr. 15. 1. ſunt minores H: igitur C, eſt finitæ extenſionis. Iam ſi
C, non eſt æqualis H; neceſſariò maior erit, vel minor:
Pr. 16. 1. ſit maior; & quoniam C, eſt maioris extenſionis H; ſumi
poſſunt ex magnitudinibus diſpoſitis in C, aliquot à pri-
ma, vt impleant H: ſumantur, & ſit ipſarū multitudinis
Def. 10. numerus F; qui vnitate adiecta fiat G; ergo C, ſumptæ à
prima in multitudine numeri G, ſunt maiores H, quod eſt
contrà

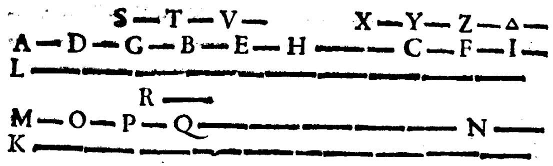
contrà ſuperiùs demonſtrata: nō eſt ergo C, maior H. Sit
minor; & inueniatur X, intermedia extremas V, R, vt dif- Prop. 8. 3.
ferentia V, X, plano denominata ſit æqualis C; & intelli-
gātur V, X, eſſe poteſtates ipſi R, homogeneæ, quarū radi-
ces inueniantur Y, S: quia V, eſt productus magnitudinū
inæqualium, & continuè diſpoſitarum A, I, K; conſtat
quòd Y, eſt intermedia extremas A, K; & quia X, eſt in-
termedia extremas V, R; differentia V, X, eſt minor dif-
ferētia, V, R; & differētia Y, S, minor eſt differētia Y, B;
& ablata communi differentia Y, K; differētia K, S, minor
eſt differentia K, B: & quoniā in diſpoſitione K, ad B, ſunt
magnitudines infinitæ; etiam differentiæ ſunt infinitæ; &
ſimul ſumptæ ſunt æquales vni differentiæ extremarum
K, B; ergo vel prima ex huiuſmodi differentijs eſt maior
differentia K, S; vel ſi minor, plures à prima ſumptæ ſe- Pr. 16. 1.
cundum aliquem numerum implent differentiam K, S;
qui numerus vnitate adiecta fiat N; ergo differentiæ in Def. 10.
diſpoſitione K, ad B, ſumptæ à prima ſecundum nume-
rum N, ſunt maiores differentia K, S: Sumantur ergo ſe-
cundum numerum N, magnitudines à K, diſpoſitæ ad B,
præter K; & aſſumptarum ſit vltima T; quam ſequantur
aliæ duæ D, E; & in diſpoſitione Q, ſit Z, productum
TDE; & quot ſunt magnitudines aſſumptæ à K, vſque
ad E, totidem ſumantur ex fractionibus diſpoſitis in C,
à prima; quarum aggregatum ſit P: conſtat P, eſſe por-
tionem ipſius C; & differentiam K, T, eſſe maiorem dif-
ferentia K, S; & addita communi differentia Y, K, diffe-
rentiam Y, T, maiorem differentia Y, S; & propterea
differentiam inter V, & homogeneam poteſtatem à radi-
ce T, maiorem differentia V, X; eſt autem differentia V,
Z, maior differentia inter V, & homogeneam poteſtatem
à radice T; ergo differentia V, Z, eſt multò maior diffe-
rentia V, X, & ideò differentia V, Z, plano denominata Prop. 7. 1.
maior eſt differentia V, X, plano denominata; videlicet
Q 2 fra-

fractione C : eſt autem differentia V, Z, plano denominata æqualis P ; ergo P, eſt maior C, portio toto ; quod eſt abſurdum : non eſt ergo C, minor H ; ſed neque maior : ergo C, eſt æqualis H. Quod, &c.

Theor. 10. Prop. 11.

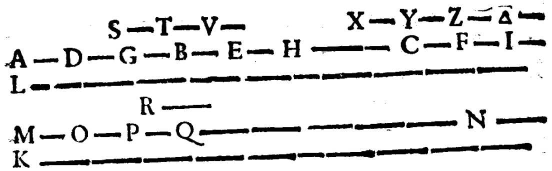
Si plures continuæ diſpoſitiones, in quibus differentiæ ſint ſimiles, magnitudinum infinitarum ità componantur in vnica diſpoſitione, vt quæ ſunt ordinis eiuſdem ſint ſimiliter ordinatæ; differentiæ in ſingulis diſpoſitionibus eodem ordine ſumptæ, cum ijs, quæ ſunt in ipſarum diſpoſitionum principijs, denominatæ productis tùm earumdem, quarum ſunt differentiæ, tùm etiam intermediarum diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales vni differentiæ productorum à primis, & ab vltimis extremis, eorumdem productorum plano denominatæ.

TRium continuarum diſpoſitionum ex magnitudinibus infinitis inter binas extremas procedentium prima ſit ab A, per B, ad C ; ſecunda à D, per E, ad F ; tertia à G, per H, ad I ; in quibus differentiæ ſint ſimiles ; & quæ



& quæ componantur in vna diſpoſitione ab A, per D, G, B, &c. ad I, ità vt primæ A, D, G, ſecundæ B, E, H, & reliquæ deinceps ordinis eiuſdem, necnon vltimæ C, F, I, ſint ſimiliter ordinatæ ; & ſingularum diſpoſitionum differentiæ denominatæ productis in huiuſmodi compoſita diſpoſitione (vtpote differentia A, B, denominata producto ADGB ; & differentia D, E, producto DGBE ; & ſic deinceps in infinitum) diſponantur, & colligantur in L ; & à primis ADG, & vltimis CFI, producantur M, & N. Dico, quòd L, eſt æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Eſt enim L, extenſionis finitæ : nam aſſumptis in L, quotlibet à prima, in denominatione vltimæ aſſumptarum tres adhibeantur B, E, H, magnitudines inter A, I, diſpoſitæ ; & Q, ſit productum BEH ; & quoniam ſunt continuæ diſpoſitiones ABC, DEF, GHI ; Ex Dem.
continua eſt etiam diſpoſitio MQN ; & differentia M, Q, Prop. 1. 3.
minor eſt differentia M, N ; & differentia M, Q, plano Prop. 7. 1.
denominata minor eſt differentia M, N, plano denominata : eſt autem differentia M, Q, plano denominata Prop. 1. 3.
æqualis quotlibet aſſumptis in L ; igitur quotlibet aſſumptæ in L, ſunt minores differentia M, N, plano denominata ; ergo L, eſt finitæ extenſionis. Inter M, N, diſpo- Pr. 15. 1.
nantur homogenea producta in diſpoſitione ab A, ad I, vt fiant O, P, Q, producta DGB, GBE, BEH, & deinceps infinita ; & eadem demonſtratione, qua oſtendimus Q, eſſe intermedium M, N ; oſtendemus etiam O, P, &

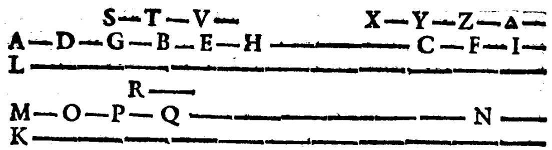
 reliqua



reliqua producta esse intermedia M, N; necnon O, P, esse intermedia M, Q; & sic dispositionem huiusmodi productorum inter M, N, esse continuam: sumatur præterea quælibet magnitudo R, inter M, N; & analogia (videlicet proportionum proportio) proportionis M, ad N, ad proportionem M, ad R, eadem esse concipiatur singularum proportionum A, ad C; D, ad F; & G, ad I, ad singulas proportiones A, ad S; D, ad T; & G, ad V, possibiles inueniri: & quoniam R, est inter M, N; si singulæ A, D, G, singulis C, F, I, sunt minores; ergo M, est minor N; & minor est proportio M, ad N, quàm M, ad R; & singulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, sunt minores quàm singulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: sunt ergo singulæ C, F, I, singulis S, T, V, maiores: sunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & singularum A, D, G, ad singulas C, F, I, minoris inæqualitatis; ergo etiam proportiones singularum A, D, G, ad singulas S, T, V, sunt minoris inæqualitatis; & singulæ A, D, G, singulis S, T, V, minores. Si verò singulæ A, D, G, singulis C, F, I, sunt maiores; ergo M, est maior N; & maior est proportio M, ad N, quàm M, ad R; & singulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, sunt maiores, quàm singulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: sunt ergo singulæ C, F, I, singulis S, T, V, minores: sunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & singularum A, D, G, ad singulas C, F, I, maioris inæqualitatis; ergo propor-

Ex doctrina Logarithmorũ.

proportiones etiam singularum A, D, G, ad singulas S, T, V, sunt maioris inæqualitatis; & singulæ A, D, G, singulis S, T, V, minores ergo in vtroq; casu singulæ S, T, V, sunt intermediæ binas A, C; D, F; G, I; & differentiæ A, S; D, T; G, V, sunt minores differentijs A, C; D, F; G, I; & quoniam in singulis dispositionibus ab A, ad C; à D, ad F; à G, ad I, sunt magnitudines infinitæ; etiam differentiæ sunt infinitæ; & simul compositæ singulis extremarum differentijs A, C; D, F; G, I, sunt æquales; ergo vel primæ differentiæ in singulis huiusmodi dispositionibus differentijs A, S; D, T; G, V, sunt maiores; vel si minores, plures à primis assumptæ Pr. 16. 1. secundùm aliquos numeros implent differentias A, S; D, T; G, V; qui numeri singulis vnitatibus adiectis fiant X, Y, Z; quorum numerorum sit maximus Y; cuius fiat multiplex Δ, iuxtà numerum magnitudinum A, D, G: ergo differentiæ in singulis dispositionibus A, ad C; D, Def. 10. ad F; G, ad I, sumptæ à primis iuxtà singulos numeros X, Y, Z, sunt maiores differentijs A, S; D, T; G, V; & sumptæ iuxtà numerum Y, sunt multò maiores ijsdem differentijs A, S; D, T; G, V: igitur sumantur secundùm numerum Y, magnitudines ab A, dispositæ ad C; à D, ad F; à G, ad I, post ipsas A, D, G; & assumptarum sint vltimæ B, E, H; quæ cum sint ordinis eiusdem reperientur in dispositione ab A, ad I, consequentes; & post easdem A, D, G, in ordine numeri Δ, & aliorum deinceps numerorum, qui sunt proximè maiores ipso Δ; & pariter in dispositione productorum ab M, ad N, reperietur ipsorum BEH, productus Q, in eodem ordine numeri Δ, post M: quia singulę differentię A, B; D, E; G, H, sunt singulis differentijs A, S; D, T; G, V, maiores; etiam differentia M, Q, maior est differentia inter M, & productum STV: & quia singulę proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, ad singulas proportiones



tiones A, ad S; D, ad T; G, ad V; & colligendo omnes ad omnes eamdem habent analogiam (siue proportionum proportionem) quæ est proportionis M, ad N, ad proportionem M, ad R; permutandoque, & conuertendo, sicut proportio M, ad N, æqualis est proportionibus A, ad C; D, ad F; G, ad I, ita proportio M, ad R, æqualis est proportionibus A, ad S; D, ad T; G, ad V; videlicet proportioni M, ad productum STV: ergo R, est æqualis producto STV; & differentia M, Q, maior est differentia M, R; ergo dispositio productorum M, O, P, Q, est continua magnitudinum infinitarum procedentium ab M, ad N: in continua ergò dispositione magnitudinum infinitarum inter extremas quaspiam magnitudines ab M, ad N, procedentium, differentiæ planis denominatæ disponantur in infinitum, & aggregentur in
Prop. 9. 3 K; ergo K, est æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ: & quoniam M, est productum A, in DG; & O, productum B, in DG; erit planum MO, productum ADGB, in DG; ergo M, O, & planum MO, sunt homologa rationis eiusdem A, B, & producti ADGB; ergo differentia M, O, ad planum MO, est vt differentia A, B, ad productum ADGB; & fractio, in qua differentia M, O, plano denominatur; videlicet prima dispositarum in K, est æqualis fractioni, in qua differentia A, B, denominatur producto ADGB; videlicet primæ dispositarum in L: similiter demonstrabimus easdem singillatim

gillatim magnitudines tùm in K, tùm in L, esse dispositas; & sunt ambæ dispositiones K, & L, extensionis finitæ, vt probauimus; ergo K, & L, congruunt inter Ax. 2.
se: cum ergo K, sit æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ; etiam L, est æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Quod, &c.

DEFINITIONES.

Exposita rationali, & datis quotlibet, si rationalis ad aliam, quæ inuenitur habeat proportionem compositam ex proportionibus eiusdem rationalis ad singulas datas; vocetur inuenta, productus datarum.

Et datæ lineæ, dicantur, latera, producti.

Exposita rationali, & datis duabus alijs magnitudinibus; si vt prima datarum ad rationalem, ita fiat secunda ad aliam, quæ inuenitur; vocetur inuenta, fractio facta ex denominatione secundæ per primã.

Et ipsa secunda magnitudo, numerator fractionis.

Prima verò, denominator.

Et exposita rationalis, vnitas appelletur.

Huiu-

Huiusmodi definitiones in Arithmetici voluminis calce appositas esse volui, vt faciliter quisq; possit Arithmetica Theoremata in Geometricos vsus conuertere, & demonstrationes in quantitate discreta expositas, in quantitate continua mutatis nominum interpretationibus adhibere.

Finis Libri Tertij.

Omnium calculis approbandam, immò albis signandam lapillis Arithmeticam hanc Speculationem censuit Ouidius Montalbanus librorum Mathematicorum pro Eminentiss. & Reuerendiss. Principe Archiepiscopo Bononiæ Card. Nicolao Ludouisio Censor.

V. D. Antonius Bon Vicinus Pænit. pro eodem Eminentiss.

Bartholomæus Massarius Lib. Mathm. reuisor pro Reuerendiss. P. Inquisit.

Imprimatur
Fr. Vincentius Pratus à Serraualle Inquisit. Bononiæ.

BONONIAE Typis Iacobi Montij. MDCL.
Superiorum permissu.